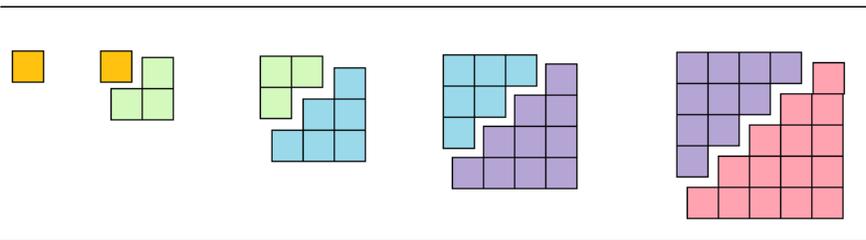
# ODIO LA MATEMATICA

## MA CHI HA PAURA DEI NUMERI CATTIVI?

GIACOMO CAVALLO

**08/10/2010**

# ODIO LA MATEMATICA

## MA CHI HA PAURA DEI NUMERI CATTIVI?

# I.  Introduzione.

# ODIO LA MATEMATICA. PERCHÉ?

## Il più grande gioco del mondo.

"Odio la matematica". Lo dice un sacco di gente, grandi e piccoli. Se ne vantano quasi. Molta gente non crede neanche possibile che la matematica possa piacere.
Perché?
Voi che odiate la matematica provate a rispondere. Perché odio la matematica?

Suggerisco alcune risposte:

" *La odio perché non la capisco. In matematica ho sempre avuto cattivi risultati".*

"*É noiosa*".

"*Gli esercizi sono stupidi, ci vuole attenzione, è facile sbagliarli,  e non si capisce a cosa servano*".

"*Adesso che ci sono i calcolatori elettronici, studiare la matematica non serve più a niente*".

"*Io odio non solo la matematica, ma anche la geografia, la storia , le scienze eccetera. La matematica è il peggio di tutte queste cose messe insieme, perché non ha nemmeno personaggi interessanti come la storia, paesi interessanti come la geografia, animali e piante interessanti come le scienze".*

Ci saranno anche mille altre ragioni. Una ragione a cui io credo in particolare è che ci sia stato un difetto nella comprensione dei primissimi insegnamenti dell'aritmetica. Per cui né le parole né le regole ci sono chiare. È chiaro che non può piacere essere costretti ad eseguire esercizi che sbaglieremo sempre.

Non c'è dubbio che la matematica richieda attenzione e concentrazione. Su questo non c'è niente da fare. Ad alcuni attenzione e concentrazione vengono naturali, ad altri costano. Ma il piacere di risolvere un esercizio di matematica è una soddisfazione reale, tanto più grande quanto più l'esercizio è difficile. Perché dovrebbe fare piacere salire su una montagna, quando con l'aereo si può andare più in alto e più comodamente? Non c'è niente da fare, salire a piedi su una montagna anche modesta e vedere un panorama nuovo davanti ai nostri occhi, ci dà l'impressione di avere fatto qualcosa di importante anche se totalmente inutile.

L'utilità della matematica, su cui è basata la nostra civiltà moderna, è un fatto importante, ma non è  il motivo principale per cui i matematici hanno fatto avanzare la matematica.  I matematici ben di rado hanno cercato di risolvere un problema perché la soluzione serviva a qualcosa o a

qualcuno. Piuttosto, hanno attaccato e risolto il problema perché era difficile ed interessante, e quindi si immaginavano tanta più soddisfazione dalla soluzione.

Noi abbiamo un istinto che ci spinge a risolvere i problemi, ed è quello che ci ha fatto creare la nostra civiltà. Risolvere problemi ci piace, altrimenti da millenni nessuno risolverebbe più problemi. Risolvere problemi di matematica non richiede altro che la nostra testa, e magari carta e matita. Però occorre interessarsi ai problemi. Se, per incominciare, il problema non è interessante, avremo meno piacere a risolverlo. Dunque in questo libro cercheremo di vedere se la matematica possa offrire dei problemi interessanti.

Ma che significa che un problema deve essere interessante?
Io credo (ed ho avuto interminabili discussioni con amici su questo aspetto) che tutti i problemi siano potenzialmente interessanti solo perché sono problemi. Come ho detto, il nostro cervello ha fame di problemi, perché possiede un meccanismo fondamentale per risolverli, ed applicare questo meccanismo è la gioia intellettuale fondamentale del nostro cervello. Potremmo quasi dire che il piacere di ascoltare musica è quello di scoprire certi schemi presenti nella musica confrontandoli a certi schemi che abbiamo nella nostra mente. Alla fine anche il piacere di guardare una partita di calcio è il desiderio di vedere certi schemi che abbiamo in mente realizzarsi in natura.

Per questa ragione non credo che, a meno di severi difetti mentali, un bambino possa disinteressarsi alla matematica, che può soddisfare a questo istinto, a questa fame di problemi che è la base della nostra intelligenza. Quindi il bambino che, per una falsa partenza, odia tutta la matematica, è defraudato della gioia di usare la sua intelligenza al meglio. E ciò è un gran peccato.

La matematica è il gioco più grande in cui si sia impegnato l'ingegno umano da almeno quattromila anni. Una specie di gigantesco gioco in cui tutti gli uomini cooperano da sempre. Studiare la matematica è partecipare a questo gioco. Qui grandi ingegni hanno lavorato a fianco di cervelli più modesti, ma tutti con un loro piacere impagabile. Chiunque abbia qualche talento può trovar almeno un campo della matematica di interesse per lui.

Per andare in vacanza alle Maldive occorrono solo soldi, e poi chiunque è capace di farlo. Il piacere di arrivare alla soluzione di un problema di matematica, per semplice che sia, non può essere comprato a nessun prezzo. Ce lo dobbiamo guadagnare. Ma una volta che abbiamo raggiunto il risultato, proviamo una gioia indescrivibile, piena e pura, come se stessimo facendo esattamente quello per cui il nostro cervello esiste.

## 2. LA STORIA DEL “LIBRO” E DEL GIOVANE GAUSS.

Un grande matematico, Erdős, diceva che esiste (chissà dove!) un libro, anzi "IL LIBRO" per eccellenza, in cui sono scritte le soluzioni più brillanti di tutti i problemi matematici. Solo che il libro è inaccessibile. Ogni tanto a qualche raro essere fortunato viene concesso di dare un'occhiata ad una pagina. E’ allora che abbiamo una soluzione "direttamente dal libro".

Il ritratto più giovanile di Gauss che ho trovato su internet. Possiamo forse immaginare come doveva essere a cinque anni.

Un famoso esempio è la storia di come fu scoperto il genio matematico di Carlo Federico Gauss, che ai suoi tempi fu chiamato "il principe dei matematici". Aveva cinque anni, era in una grande classi di quaranta scolari di varie età, con un maestro, certo Bultmann, che faceva entrare l'aritmetica in testa ai bambini a furia di scapaccioni. Bultmann assegnò alla classe il problema di calcolare la somma dei numeri da 1 a 100. I bambini facevano i conti ciascuno sulla sua lavagnetta, scrivevano il risultato, depositavano la lavagnetta sulla cattedra. Si formava una pila di lavagnette, e quando tutti avevano finito, il Bultmann incominciava la correzione partendo dalla cima, cioè dagli ultimi: questi risultati erano generalmente sbagliati e richiedevano la somministrazione di un certo numero di scapaccioni. Gauss aveva posato la sua lavagnetta sulla cattedra dopo neanche un minuto dall'assegnazione del problema. Aveva scritto un solo numero, il risultato. Ora, tutti sono capaci di sommare i numeri da uno a cento. Ma i conti sono lunghi e si possono fare diversi sbagli. Gauss evidentemente si era posto un altro problema: ***c’è un modo furbo giungere al risultato, evitando la noia di cento addizioni?*** Sommandoli per esempio da cento a uno? No. Sono sempre le stesse cento addizioni. Allora? è chiaro a questo punto che il problema è quello di raggruppare le varie somme in un modo furbo che ci porti a ridurre il numero di operazioni.

A questo punto, o il lettore conosce il ragionamento di Gauss, ed allora sa che questo è un ragionamento che "esce dritto dritto dal LIBRO". Oppure non lo conosce. Se non lo conosce, provi ad arrivarci da solo: in fondo ho già dato qualche suggerimento utile. Se riuscirà, gli garantisco qualche momento di gioia purissima - ed il nascere di un dubbio: qui va a finire che la matematica mi piace.

Notate che non stiamo scrivendo un compito in classe. Dormiteci sopra. Il cervello lavora anche se noi non ci facciamo caso. Passerà magari un giorno, e la soluzione si farà luce nel vostro cervello. Ma non bisogna temere di fare tentativi. Comunque la soluzione la darò più avanti.

## 3. CONSIGLI SU COME GIOCARE IL GIOCO: NON ABBIATE PAURA DEI NUMERI.

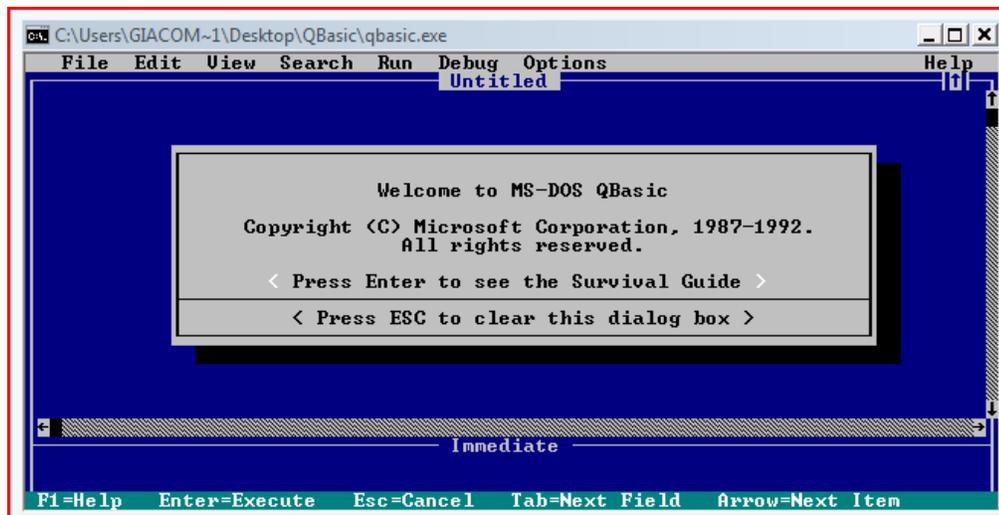
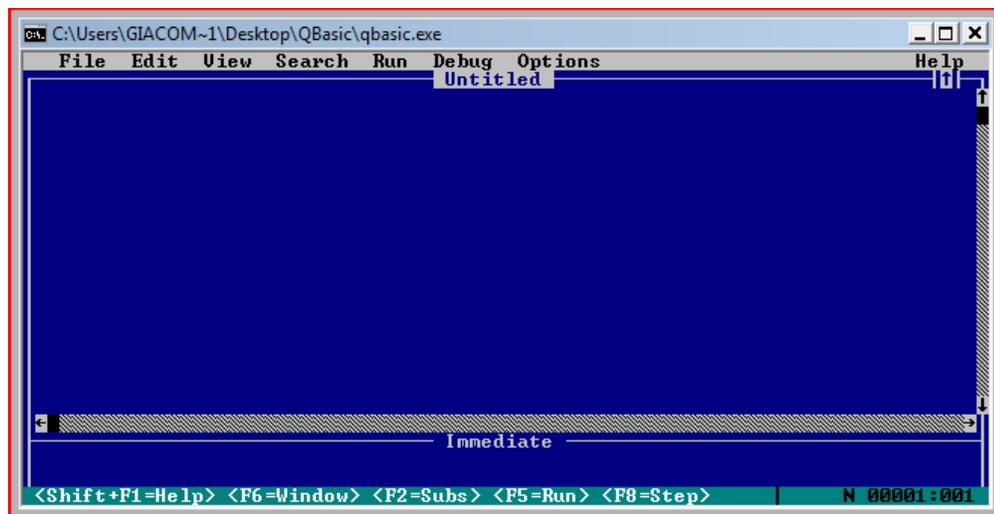
**Consigli generali.**

Aprendo questo libro qualcuno potrà restare inorridito per le sfilze di numeri che vi compaiono. Eppure oggi possiamo dire tranquillamente**:"Non abbiate paura dei numeri".** Un tempo i numeri potevano spaventare, perché si dovevano fare a mano le quattro operazioni fino alla nausea, e se si sbagliava erano guai. E' bene fare ancora questi esercizi, perché è bene sapere che anche i calcoli più lunghi e complicati, dati tempo, carta, matita e buona volontà, li possiamo fare. Tuttavia ci sono oggi mezzi per fare questi calcoli senza sbagliare, e sono a disposizione di tutti. Le calcolatrici elettroniche, anche piuttosto sofisticate, hanno un costo relativamente basso. Ogni PC ha inclusa negli "accessori" una piccola calcolatrice. Da Internet si possono scaricare gratuitamente calcolatori con varie prestazioni. Se scrivete un'operazione su Google (ricordando solo che "* "sta per "moltiplicato per", e "^" sta per "elevato alla potenza") e premete il tasto "Invio", ottenete subito il risultato. Infine, potete scaricare gratuitamente "linguaggi " interi, come il semplice Basic, con cui potrete fare dei programmi e ottenere risultati interessanti. Non c'è più nessun motivo di avere paura. Anzi, con questa sicurezza, potrete azzardarvi a seguire i consigli che seguono. Secondo me, vedere che lavorando con oggetti di cinque o dieci cifre e più otteniamo i risultati che dobbiamo, magari già trovati identici fino all'ultima cifra da schiere di matematici prima di noi, dovrebbe dare un po' di soddisfazione, come quella di un generale che fa marciare le sue truppe di migliaia di uomini ben coordinate e vince una battaglia.

Dunque:
- Tentate ogni esercizio senza paura di sbagliare. Smontatelo e complicatelo una volta che lo avete risolto.
- Cercate di risolvere ogni problema nel maggior numero di modi possibile.
- Non abbiate paura a cercare di generalizzare i vostri risultati. Se le generalizzazioni sono giuste, complimenti; se sono sbagliate vale la pena rendersene conto e soprattutto capire il perché.
- Non abbiate paura di fare tanti calcoli, a mano e a macchina, con molte cifre. Fateli con ordine. Scrivete bene i numeri, con eleganza. Troverete che è bello scrivere lunghi numeri che per voi hanno un senso.
- Disegnate molto, su carta se possibile a quadretti o millimetrata.
- Visitate i siti di matematica su Internet. Ce ne sono di eccellenti, con animazioni e tutto quel che serve. A qualcuno farò riferimento in seguito.
- Imparate a copiare e usare dei programmi semplici in QBasic o simile. Usate intanto quelli che trovate su questo libro, che sono in tutto una trentina su sessantacinque capitoli, quindi non assolutamente necessari per la comprensione del libro. Se sapete programmare un po', modificate i programmi, fate calcoli e simulazioni senza paura. Tenete presente che QBasic è disponibile gratuitamente su Internet. Credo che abbia dei problemi a lavorare su Windows Vista, ma i programmi che io propongo sono talmente poco sofisticati che penso possano funzionare sia su Vista che su altre versioni di Basic. Scaricatelo e installatelo (o fatelo scaricare

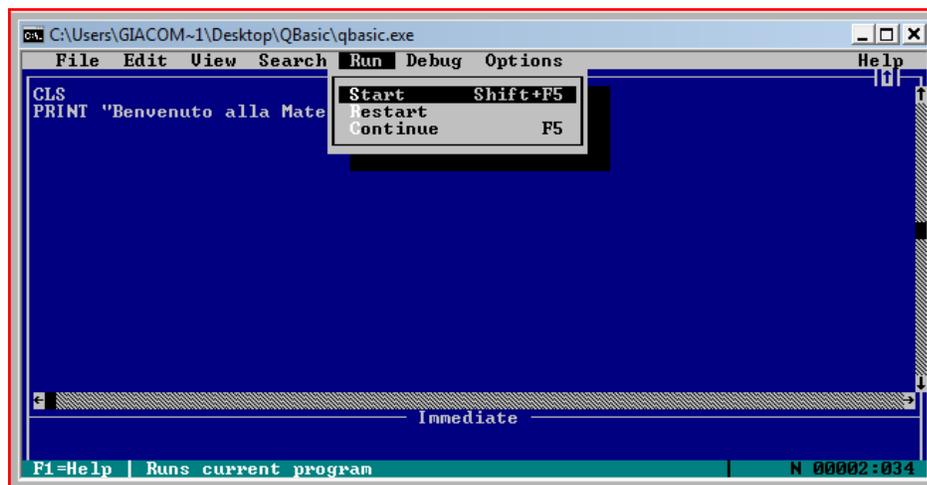
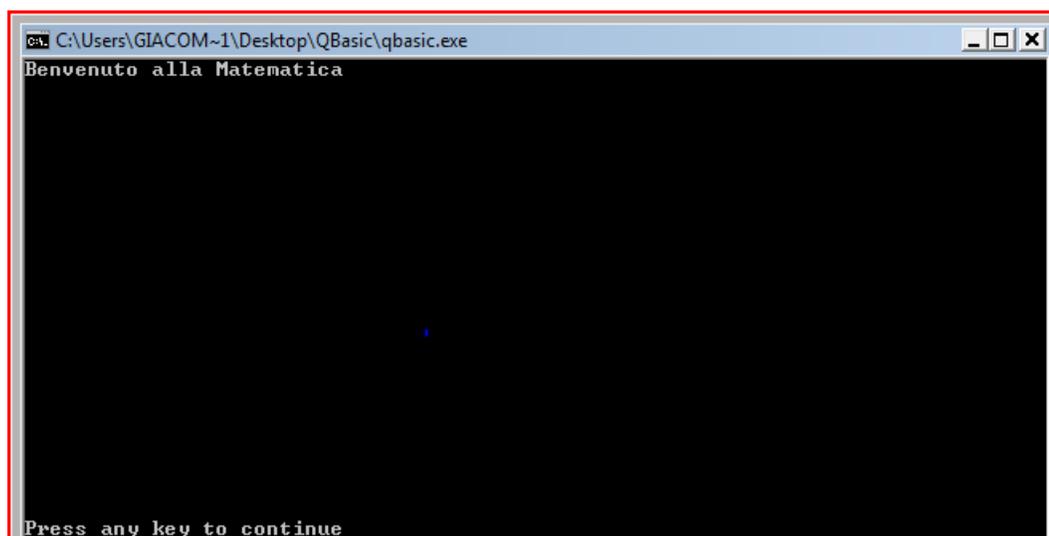
e installare da qualcuno che lo sappia fare) e poi incominciate.
Gli utenti di Mac hanno un problema in più: esiste tuttavia un Chipmunk Basic gratuito, antiquata forma di Basic, che richiede che tutte le istruzioni siano numerate. I programmi che troverete in questo libro sono talmente semplici che, una volta numerate le righe, dovrebbero essere facilmente convertibili in Chipmunk Basic.

## QBASIC

Sia chiaro che – come ho detto - usare QBasic non è essenziale per la lettura di questo libro. Tuttavia, vorrei dare qualche istruzione elementare per i più volonterosi, che ci si vogliono provare.
Il primo schermo che si presenta quando il computer è pronto, il programma è installato, e voi l'avete fatto partire, è il seguente:

Voi premete il tasto ESC in alto a sinistra e scompare il rettangolo grigio centrale, con cui non potete lavorare. Collo schermo qui sotto, invece, potete lavorare:

In alto a sinistra dovrebbe esserci un trattino che fa “blink blink”. Potrete subito scrivere il vostro

***PROGRAMMA NUMERO 1 IN QBASIC***

```
CLS
PRINT "Benvenuto alla Matematica"
```

Mettiamoci d’accordo una volta per tutte che quando uso il carattere “Courier” come nelle due righe precedenti, sto scrivendo un programma in lingauggio Qbasic.
Una volta scritto questo, cercate “**Run**” sulla barra superiore. Cliccate su **Run** e viene giù un Menu a tendina.

Ora cliccate su **Start**, e comparirà docilmente su un nuovo schermo, nero, la scritta “Benvenuto alla Matematica”.

In basso a sinistra sta scritto, in inglese:”Premete un tasto qualsiasi per continuare”, che vi

riporterà allo schermo blu. Lo schermo blu è quello dei programmi, lo schermo nero è quello dei risultati.

CLS vuol dire "Clear screen", cioè "pulisci lo schermo (nero)". PRINT, stampa, vuol dire "scrivi sullo schermo". RUN, corri, vuol dire "Fai andare il programma". START vuol dire "incomincia". Se volete terminare un programma mentre siete sullo schermo nero, premete insieme i tasti CTRL (in basso a sinistra) e C. Se volete concludere la sessione QBasic, andate allo schermo blu, cliccate su **File** in alto a sinistra, viene giù il menu a tendina e cliccate su **Exit**.

Tenete presente che se scrivete sullo schermo:

```
Print 2347 * 234
```

Il computer intenderà il * come un "per", e il risultato comparirà sullo schermo nero, dopo che avrete premuto **Run** e **Start** .

Notate bene che questo non è un manuale di programmazione in QBasic. Io presenterò i programmi più semplici possibili che portano allo scopo che desidero, e cercherò di spiegare strada facendo i passi più importanti che compaiono nei programmi (molto rudimentali) che ogni tanto offrirò alla vostra attenzione e che potrete comunque copiare – con cura, però: i linguaggi di programmazione sono piuttosto inflessibili e non ammettono errori.

Dato che io userò QBasic solo per abbreviare i calcoli più semplici (ma lunghi e ripetititivi) e fare simulazioni, **le istruzioni chiave sono assai poche.**

- CLS è solo per pulire lo schermo ("CLear Screen"), e END (quando c'è, ma non è necessario, perché QBasic lo aggiunge lui alla fine del programma se non lo trova) segnala alla macchina che il programma finisce lì (ma non è veramente necessario scriverlo).
- Le quattro operazioni sono: addizione (+), sottrazione (-), moltiplicazione (*), divisione (/). In più abbiamo l'elevazione a potenza (a^b è quella che noi chiamiamo $a^b$). Usando quest'ultimo simbolo ^ , potete elevare *a* a qualsiasi numero, intero o no, positivo o negativo. Vedremo poi che cosa tutto questo significa.
- Per ripetere un calcolo userò il ciclo `FOR I = N to M (…) NEXT I`. L'interpretazione è "per I che varia da N ad M eseguire tutte le operazioni incluse in (. . .) fino all'istruzione NEXT I, che chiede di sostituire il valore di I in corso col valore di I successivo. Nei miei programmi il successivo è semplicemente I + 1. Dopodiché si ricomincia ad eseguire le istruzioni con il nuovo I.
  Il programma

  ```
  FOR I = 1 to 10
  PRINT I^2
  NEXT I
  ```

  per prima cosa prende I = 1, poi stampa sullo schermo 1 al quadrato, cioè 1. Poi trova l'istruzione NEXT I. NEXT I è 2. Torna alla seconda riga, stampa sullo schermo 2^2, che è 4. Poi ritrova NEXT I, che ora vale 3. Torna alla seconda riga, stampa 3^2, cioè 9.

Eccetera. Quando I = 10, stampa 10^2 cioè 100 e si ferma.

- Per fare simulazioni mi baserò sull'istruzione RANDOMIZE e sulla "funzione" RND. Spiegherò più anti di cosa si tratta.
- Infine, userò la condizione IF….THEN ("se…allora")
- Qualche volta mi servirà la "funzione " A MOD B, che dà il resto della divisione di A per B.
- L'istruzione PRINT A,B,C farà comparire sullo schermo i risultati A, B, C con qualche spazio tra l'uno e l'altro.
- Resta ancora da dire come introdurre i dati. Io userò solo due modi: o scriverli direttamente nel programma o usare l'istruzione "INPUT", che è così costruita:
  INPUT "*Richiesta a piacere* ", *nomi delle variabili immesse, separate da virgole*.
  Per esempio,

  ```
  INPUT "Qquanti anni hai? ", ANNI
  ```

  In questo caso, una volta che facciamo "correre" il programma (cliccando su **Run** e poi su **Start**) il computer ci presenta sullo schermo la domanda "Qquanti anni hai?" esattamente come l'abbiamo scritta, e si aspetta che noi scriviamo un numero, che il programma metterà nella "scatola" ANNI.
  Una volta messo il numero e premuto il tasto "Invio", il programma esegue le istruzioni successive. Per esempio:

  ```
  PRINT "Tra un anno ne avrai ", ANNI+1
  ```

In programmazione, l'istruzione che forse lascia più stupiti all'inizio è quella la cui forma più semplice è

**X = X+1**

Se scriveste questo a scuola, il vostro insegnante di matematica vi prenderebbe a calci se gli fosse permesso, ma l'istruzione *in programmazione* ha senso. X non è un valore, ma una scatola con su scritta l'etichetta X. L'istruzione X = X +1 è solo un modo abbreviato di dire "apri la scatola X, aggiungi 1 a quello che c'è dentro, e richiudi la scatola, che continua a chiamarsi X".

**Generalizzazioni.**

Parliamo brevemente delle generalizzazioni. Uno dei modi di generalizzare le nostre soluzioni ed anche i nostri problemi, è quello di ricorrere al calcolo letterale.
per esempio, invece di scrivere che
2+3 = 3+2,
5+11=11+5
eccetera, possiamo dire che dati due numeri qualsiasi, a e b, allora a+b=b+a. Se mettiamo qualsiasi numero al posto di a e qualsiasi numero al posto di b, vediamo che è vero.

$$a+b = b+a$$

Non possiamo generalizzare 2+2=2 x 2, cioè  non è vero che a+a=a x a.

$$a \times a = a + a$$

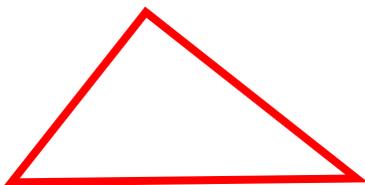
E come lo sappiamo, che non possiamo generalizzare? In genere la regola è "Quando siete tentati di generalizzare, provate altri due esempi", ma sovente non basta.  Ma nel caso di a+a = a x a, provando con a=0 funziona  ancora, perché 0+0 = 0 x 0, ma già con a=1 non funziona più. Poi funzionerà con 2, dopodiche non funzionerà più. Ma  in matematica basta **un solo** contro-esempio per rovinare tutto.

Dunque bisogna fare attenzione.

E' molto facile che in matematica, soprattutto in teoria dei numeri, ci si illuda di aver trovato formule di importanza generale perché sono valide in numerosi casi consecutivi. Veramente, soprattutto in quest'area, non bisogna fidarsi. Ad esempio, i primi quattro numeri dispari (1, 3, 5, 7) sono primi, ma poi le cose si complicano. Un esempio classico più sottile sono le  formule

$n^2 – n + 41$
$n^2 – 79 n + 1601$

La prima formula produce numeri primi per n che va da 1 a 40. Poi la festa finisce. Quando n vale 41, la fomula vale $41^2$, che non è evidentemente primo.  Se avessimo verificato  solo tre casi ci saremmo convinti che la formula produce **solo** numeri primi.
La seconda formula produce numeri primi per n che va da 1 a 79, e poi fallisce anche lei. Per n = 80   l'espressione vale 1681, che è di nuovo $41^2$.

Notate che ciò vale anche per le figure geometriche. Quando si chiede di disegnare un triangolo "qualunque", non di rado ne viene disegnato uno rettangolo o quasi, come quello qui sotto. Il problema è che i triangoli rettangoli hanno proprietà che non tutti i triangoli hanno.

**Punto e virgola.**

Cercate di abituarvi a usare sia la virgola che il punto per indicare numeri decimali.  Quindi in questo  libro 0.5 = 0,5

Più di metà del mondo usa il punto, gli altri la virgola. Sfortunatamente, Basic, il linguaggio in cui io farò i miei esempi, usa il punto per indicare i decimali. Meglio usare tutt'e due le notazioni, anche se ogni tanto ci sono delle ambiguità, per cui quelli della virgola scrivono 1.000 per indicare mille, e quelli del punto scrivono 1,000. Io non userò mai né l'uno né l'altro, e scriverò 1000. Tutt'al più, nei numeri con tanti zeri, lascerò uno spazio ogni tre zeri, come in 1 000 000.

**Moltiplicazione : × e punto e nulla.**

**a x b (a per b)** lo si scrive meglio come **a·b** o, meglio ancora, come **ab**, per non rischiare di credere che il × (per) sia invece una x (ics). Anche qui, userò le tre notazioni se mi sembrerà conveniente. Ma sia chiaro che in matematica avanzata non si usa mai la x e si usa di rado il punto per indicare il prodotto.

**La regola dei segni**:

**"Più per più dà più - meno per meno dà più - più per meno e meno per più danno meno".**
Occorre impararla a memoria. Magari un diagramma può aiutare:

Perché questa regola? Perché con questa regola la nostra matematica si può applicare con profitto ai calcoli di cui hanno bisogno commercianti, banchieri, ingegneri. Ma la regola è **arbitraria,** e bisogna impararla com'é. Tuttavia si possono far vedere esempi in cui questa regola ci serve mentre una regola diversa non servirebbe.

**Semplificazioni.**

É utile saper semplificare e mettere in evidenza i fattori. Nel calcolo letterale è più facile che nel calcolo numerico.
Per esempio è evidente che

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

Non è altrettanto evidente che

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

**Prodotti notevoli** da conoscere.

Ricordate che la regola del prodotto di due somme è che bisogna moltiplicare **ogni addendo della prima somma per ogni addendo della seconda**. Bisogna solo procedere con ordine senza perdere la testa. Se lo si fa per

**(a+b)(a-b)**

si trova **aa-ab+ba-bb,** cioè $\mathbf{a^2-b^2}$**.** Risultato notevolissimo da non dimenticare mai.

Provate magari a convincervi per mezzo dello stesso sistema della correttezza di due altri prodotti notevoli:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

## 4. BATTERE IL CALCOLATORE AI CALCOLI.

É chiaro che in certi calcoli noi abbiamo un vantaggio su un calcolatore e in altri no. Battere il calcolatore non è in generale possibile, altrimenti non esisterebbero calcolatori, ma si può cercare di estendere l'area dei problemi in cui noi siamo più veloci.

É chiaro che anzitutto dobbiamo ripassarci le tabelline delle moltiplicazioni.

Ora siamo pronti per la gara. Da una parte noi con carta e matita, dall'altra un nostro compagno, Arcibaldo, che ha un calcolatore/calcolatrice tascabile.

**1. Moltiplicazioni di numeri di una cifra (deve essere facile).** L'insegnante dice: "5 x 5" . Arcibaldo deve battere quattro tasti (5, x, 5, =) e copiare la risposta. Noi sappiamo subito la risposta. 25. Uno a zero contro il calcolatore.
Almeno fino a 10x10 dovremmo vincere sempre noi.

**2. Fare il quadrato di un numero di due cifre che termina per cinque (è facile)** Anche qui Arcibaldo può restarci male.
REGOLA: Il risultato termina sempre per 25. Le cifre precedenti sono date dal prodotto del numero che precede il cinque moltiplicato per il numero a lui successivo.
ESEMPIO: 25 x25. Le due ultime cifre del risultato sono 25. Il numero che precede il 5 è 2, che va moltiplicato per il suo successivo, cioè 3: 2x3=6. Risultato 625.
Così si trova subito che 85 x 85 = 7225 e 95 x 95= 9025.
Due a zero contro il calcolatore.

Ci si può chiedere: è ancora vero che per avere 12345 x 12345 si calcola (1234 x1235) e poi ci si attacca 25 ?? Provate e trovate la risposta.

Tra l'altro, la regola $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ci dà modo di fare qualche moltiplicazione rapida, se dobbiamo moltiplicare due numeri come 23 x 27 o 51 x 59, o 38 x 42. Il trucco, che con un po' di esercizio si vede ad occhio, ciò che il computer non può fare senza insegnarglielo, è che:

23 x 27 = (25-2)(25+2)= 25 x 25 - 2 x 2 = 621
51 x 59 = (55-4)(55+4) = 55 x 55 - 4 x 4= 3025-16 = 3009
38 x 42 = (40-2)(40+2)= 40 x 40 - 2 x 2= 1600-4=1596

**3. Moltiplicare due numeri di due cifre che incominciano per 1 (esercizio molto utile).**
Per esempio 14 x 18. Si fa: 140+80= 220 (che è anche 180+40), a cui si somma 8x4=32. Totale 252.

Altro esempio: 15*15.
Si può fare in almeno due rapidi modi:
1) 1x2=2, attaccarci 25=225

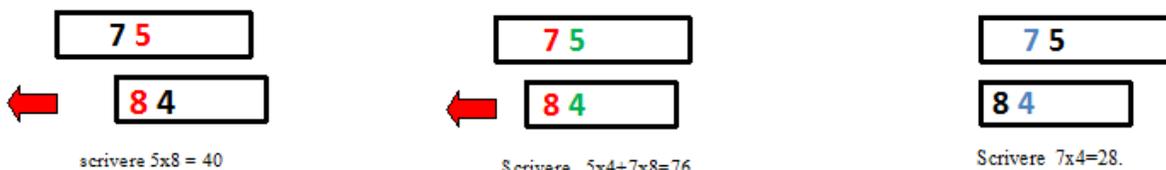
2)    (150+50)+25.

Alla base di tutto questo c'è sempre il fatto che il prodotto di due numeri di due cifre, esempio: 15x18, è la somma (10+5) x( 10+5) = (10 x 10)  + (10 x 5) + (5 x 10)+ (5 x 5).  Ci sono, nel prodotto di due numeri di due cifre, quattro moltiplicazioni e tre addizioni da fare.  Di lì non si scappa.   Ciascun numero della prima parentesi va moltiplicato per ciascun numero della seconda parentesi. In che ordine poi si facciano le varie moltiplicazioni e somme è irrilevante.

Per esempio, i calcolatori prodigio per calcolare 75 x 48  sovente procedono così: (70 x 40)+ (5 x 40 + 8x70) + (5x8).

Se non si vogliono incrociare prodotti, per fare questa ed altre simili operazioni, un  mio insegnante diceva; scrivete un numero su una strisciolina di carta con le cifre in ordine inverso, fate scorrere la strisciolina, moltiplicate le cifre che si affacciano l'una sull'altra e sommate ad ogni passo.

Esempio:  **75 x48**

Scrivere 48 come 84 su una strisciolina di carta, poi far scorrere e moltiplicare i numeri che ad ogni passo si affacciano l'uno sull'altro. Sommare i risultati

Se facciamo ancora un passo a sinistra con la striscia inferiore non ci sono più numeri da moltiplicare. Il calcolo è finito.
L'unico problema è tener conto degli zeri.
Ma si può semplicemente aggiungere uno zero ad ogni passo.

In altre parole, 40 + 760+2800.
Oppure si può  scrivere:

```
   40
  76
 28
----------
 3600
```

E se avessimo numeri con più di due cifre?  Suggerirei di provare a generalizzare.
Non per questo diventerete calcolatori prodigio se non lo siete, ma qualcuno può trovare questo procedimento più semplice.

Dunque ricaviamo  un importante insegnamento. Quello che importa per moltiplicare 75 x 48 è
1) scomporli in (70 + 5) ( 40 + 8)
2) moltiplicare in qualche modo ciascun numero della prima parentesi per ciascun numero della seconda  (quattro moltiplicazioni)
3) sommare tutti i risultati.
**L'ordine in cui queste moltiplicazioni e somme vengono fatte  è completamente irrilevante** e dipende dalla tradizione, dalle preferenze dell'insegnante e via dicendo.

Ad esempio, per fare  75 x 48 noi possiamo fare:

```
   75  x
   48
-------
   600
  300
-------
  3600
```

Come mi hanno insegnato alle elementari.

Oppure

```
   75 x
   48
------
  300
   600
------
  3600
```

Come mi avrebbero insegnato cento anni fa alle elementari  in America.

Oppure

```
   75 x
   48
------
   40
  76
```

28
3600

Col gioco delle striscioline che ho indicato sopra, come fanno molti calcolatori prodigio.

Per completezza indico come gli stessi calcolatori prodigio moltiplicherebbero due numeri di tre cifre.

| 234 | 234 | 234 | 234 | 234 |
|---|---|---|---|---|
| \| | X | ✱ | X | \| |
| 567 | 567 | 567 | 567 | 567 |
| 28 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| | 450 | 450 | 450 | 450 |
| | | 5200 | 5200 | 5200 |
| | | | 27000 | 27000 |
| | | | | 100000 |
| | | | | 132678 |

Naturalmente passo per passo si eseguono le moltiplicazioni delle cifre collegate e si sommano. Ad esempio il gruppo blu è dato da 200 x 7 + 500 x 4 + 30 x 60, totale 5200.

ALTRE OPERAZIONI FACILI:

Per **moltiplicare per 25** si moltiplica per 100 e si divide per 4.

Per **moltiplicare per 15** si moltiplica per 30 e si divide per 2.

E per moltiplicare per 2.5 o per 1.5 o per 7.5??

Per oggi basta così.
(Ma la risposta è che per moltiplicare per 2.5 si moltiplica per dieci e si divide per quattro, mentre per moltiplicare per 1.5 si moltiplica per tre e si divide per due e per moltiplicare per 75 si moltiplica per trenta e si divide per quattro.

## Nota sulla "legge delle pagine gualcite" (o legge di Benford).

Saper fare a mente le moltiplicazioni di due numeri che incominciano per 1, caso particolarmente semplice, non è del tutto futile, ed è assai più utile che saper fare a mente moltiplicazioni di due numeri che incominciano per 9. A occhio e croce diremmo che i numeri hanno la stessa probabilità di incominciare per 1 o per 2 o per 3 o per 4 o per 9. Numeri presi a caso certo funzionano così. Però, se i numeri si riferiscono a una classe di oggetti, per esempio lunghezze di fiumi, altezze di montagne, lunghezze di poemi in versi, valore di azioni in borsa, o in parole di

un poema eccetera, si scopre che lunghezze, altezze etc. che incominciano per 1 sono più frequenti, circa il 30%, invece che 1/9 (11%) del totale. Questo fu notato da gente che utilizzava libri di tavole numeriche (oggi non si usano quasi più) e vedeva che le prime pagine erano più gualcite - più usate - delle ultime. Naturalmente c'è anche una spiegazione matematica, che deriva dal fatto che la distribuzione, delle prime cifre, ad esempio nelle lunghezze dei fiumi, non deve cambiare se noi la misuriamo in miglia, o chilometri o leghe.

Darò un'indicazione intuitiva di perché la legge funziona, per coloro a cui interessa.
La tabella delle percentuali dei numeri che si riferiscono ad una data classe di oggetti e che incominciano con una data cifra (omettendo lo zero, che ci rimanda alla prima cifra significativa) è la seguente:

| Prima cifra | Percentuale |
|---|---|
| 1 | 30% |
| 2 | 17.6% |
| 3 | 12.5% |
| 4 | 9.7% |
| 5 | 7.9% |
| 6 | 6.7% |
| 7 | 5.6% |
| 8 | 5.1% |
| 9 | 4.6% |

Trovare la legge esatta non è immediato. Ma possiamo renderci conto di quello che succede.
Supponete di avere una classe di oggetti (come ad esempio i fiumi di un dato Paese) a ciascuno dei quali è assegnato un numero (come ad esempio la lunghezza dei fiumi). Mentre la leggedelle pagine gualcite riguarda la prima cifra, la chiave per capire il gioco è concentrarsi sui valori massimi della classe di numeri che ci interessa.
Se la lunghezza minima di un fiume è 1 Km e la massima è 2000 Km, i numeri tra questi 2000 che incominciano per 1 sono 1111 (Quali?). Quindi scegliendo a caso un numero fra 1 e 2000 abbiamo più di metà della probabilità che il numero incominci per 1. Se il massimo è 3000, la probabilità che incominci per 1 è comunque ancora 30% . Se il massimo è 4000 scendiamo a 25%. Ma non potremo scendere sotto 11%, che raggiungeremo solo quando il massimo sarà 10000.
Supponiamo invece di cercare i numeri che incominciano per 9. Fino ad un massimo = 9000, i numeri che incominciano per 9 sono 111, che restano tali, con probabilità quindi decrescenti (111/2000, poi 111/3000, poi 111/4000 etc.) , fino a che non arriviamo ad un numero finale 10000, nel qual caso ne avremo 1111 come per tutti gli altri numeri.
Naturalmente se il massimo numero è 700 000, vale lo stesso ragionamento. C'è qualche zero in più, ma le proporzioni di numeri che incominciano per una data cifra sono le stesse.
Se non ci credete, provate ad usare questo programma QBasic:

### *PROGRAMMA NUMERO 2 IN QBASIC: PAGINE GUALCITE*

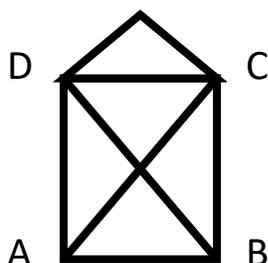
```
CLS
REM Pagine Gualcite
RANDOMIZE TIMER
```

```
INPUT "Massimo? ", MASSI
FOR I = 1 TO 20
LUN = INT(MASSI*RND+1)
PRINT LUN
NEXT I
```

Il programma non fa altro che stamparvi 20 numeri a caso tra 1 e un massimo che sceglierete quando il computer vi porrà la domanda “Massimo?”. Al numero che introdurrete , il calcolatore darà il nome MASSI.  Vedrete quindi come la cifra iniziale 1 predomini fino a che MASSI non sia 99 o 999 o 9999 e simili.

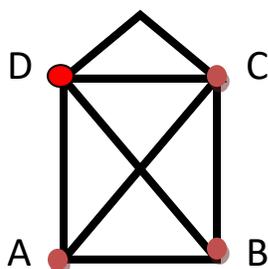
Bisogna osservare che, per quanto la legge di Benford sia derivabile matematicamente (almeno fino ad un certo punto), ci sono dei casi pratici in cui essa non è rispettata. Quindi non bisogna stupirsi se la distribuzione osservata non si accorda sempre perfettamente con la tabella data sopra. Il caso ideale in cui l’accordo è quasi perfetto è quello di una distribuzione di numeri (1) abbastanza uniforme (2) su diversi ordini di grandezza.

**Per quelli che si interessano alla programmazione in Qbasic.**
REM è un’istruzione che non viene eseguita. Serve solo a chi ha fatto il programma, per prendere nota di qualcosa. Si puòmetterla nel corso del programma per spiegare quello che si sta facendo. Qui è una sorta di titolo che ricorda lo scopo del programma.

## II.  LA CASETTA.

Vediamo ora un quiz  che non c'entra niente, tanto per dare un'idea di cosa si occupa la matematica.
Il  problema è disegnare la casetta partendo da uno dei quattro punti A, B, C, D  senza passare due volte per lo stesso tratto.

In questa casetta ci sono quattro punti, e noterete, con un po' di esercizio, che il problema ha diverse soluzioni, ma tutte queste soluzioni hanno in comune il fatto che si deve sempre partire  o da A o da B e si finisce sempre o in B o in A.

Perché?

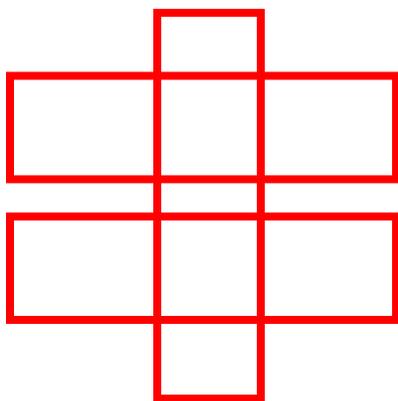
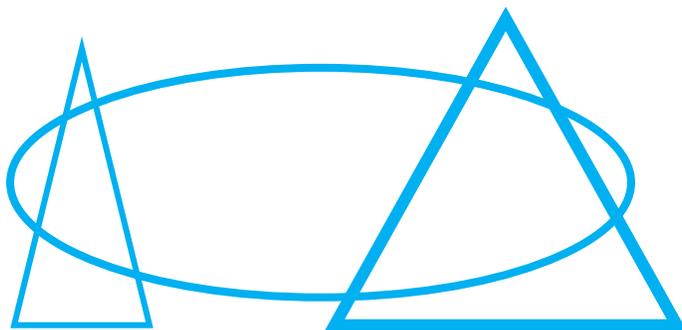
Immaginate che la linea sia in realtà un binario e la vostra penna il tram che percorre il binario.
Nei punti A, B, C, D ci sono degli scambi a più vie. I  quattro punti li chiameremo nodi.

Contate quante diramazioni ha ogni nodo.
Se ne ha un numero pari vuol dire che come ci si entra così se ne esce.
Se ne ha un numero dispari, per esempio 5, vuol dire che due le usiamo per attraversare il nodo una volta, due per attraversarlo un'altra volta, e ce ne resta una. Quest'ultima diramazione può essere usata solo per iniziare il percorso o per finirlo. Solo per uno di questi scopi  non ci occorrono due diramazioni.

Ora guardiamo i punti A, B, C, D.
A e B hanno tre braccia, C e D ne hanno quattro. Per questo in A (ed in B) o si incomincia o si finisce. Se si incomincia in A si finisce in B, se si incomincia in B si finisce in A. Se vogliamo incominciare in C  siamo nei guai, perché ci resta un braccio da completare in C  e poi un braccio

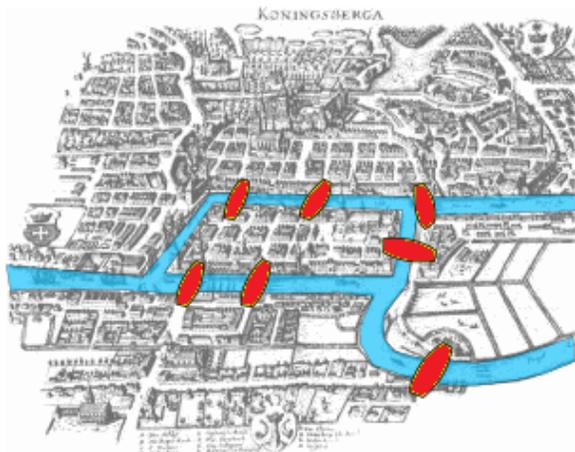
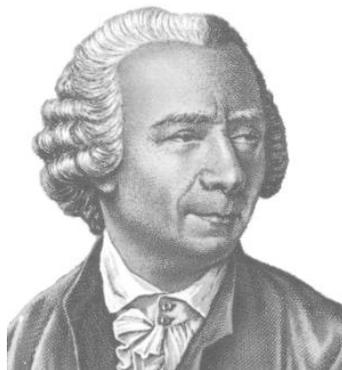
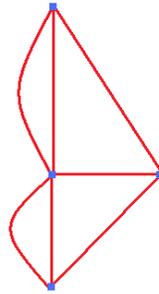
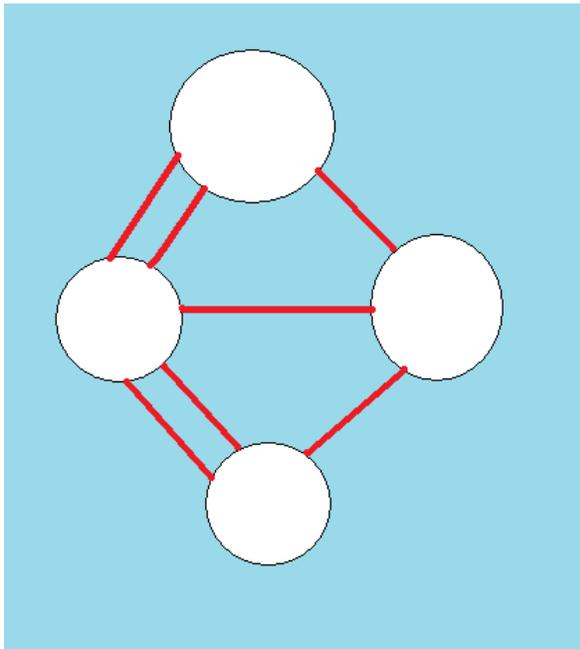
per ciascuno in A e B. Troppi, perché possiamo eseguire  il percorso una sola volta. In ogni grafico si incomincia una sola volta e si finisce una sola volta.

Questo ci dà una regola in varie parti:
- non si può compiere un percorso se ci sono **più di due nodi** con un numero dispari di diramazioni,
- se ci sono due nodi con un numero dispari di diramazioni si deve incominciare in uno dei due e si finirà infallibilmente nell'altro.
- se ci sono solo nodi pari, si potrà incominciare da uno qualunque, e si finirà  il percorso immancabilmente nello stesso nodo.

Quando qualcuno vi proporrà un problema di questo genere voi lo potrete risolvere subito o potrete dire altrettanto in fretta che il problema non ha soluzione. Alternativamente potrete proporre problemi ai vostri amici se pioverà e voi non saprete come passare il tempo.  Ma il punto è che il diagramma può essere complicato oltre misura. L'unica cosa che occorre vedere è se ci sono o zero o due nodi "dispari". Possono avere 113 braccia per uno, ma sono sempre nodi dispari. Se non ci sono più di due nodi dispari, il diagramma può essere percorso come abbiamo detto.

Vediamo ora un fatto curioso. Consideriamo il percorso rosso:

Notate  che quello che conta è solo il numero di nodi ed il numero di braccia che ciascuno di essi ha. Quindi il problema di seguire il percorso rosso indicato è identico a quello di seguire il percorso blu seguente.

Il numero di nodi ed il numero di braccia che ciascuno di essi ha sono proprietà che non dipendono dalla figura precisa, ma sono valide se noi disegniamo le nostre figure su un foglio elastico che possiamo stirare o comprimere come vogliamo, senza tagliarlo. Queste proprietà si chiamano proprietà “topologiche”, ma anche se non ricordiamo il nome non importa.

E qui, qualcuno si potrà chiedere: è possibile un diagramma con un solo nodo dispari??? La risposta è no, ma la dimostrazione è più nascosta e per il momento la lasciamo stare.

I treni sono una cosa. Ma supponiamo di avere un fiume che passa per una città, per esempio il fiume Pregel che attraversa Koenigsberg vicino al mar Baltico.  Nel ‘700 c’erano 7 ponti ordinati come in figura. Si può pensare ad un unico percorso che passi su tutti i ponti una sola volta?
Se non si può, come si può risolvere il problema cambiando il numero dei ponti?

C’è qualche somiglianza tra il problema della casetta e il problema dei ponti?
Questo è un problema famoso, il problema dei "ponti di Koenigsberg". Il matematico Euler, risolvendolo verso la metà del diciottesimo secolo più o meno come abbiamo indicato , iniziò lo studio di una nuova area della matematica, che si chiama “topologia” ed ha il pregio che i topi non c’entrano per niente.

Però la topologia vi permette di allungare i ponti e rimpicciolire le isole e le rive, per cui il problema dei ponti di Koenigsberg diventa il seguente (risolubile o no?) diagramma. Ma sarà poi vero?

Forse è più facile convincervene se guardate il diagramma successivo, in cui abbiamo incominciato ad allungare i ponti e rimpicciolire le isole, come passo intermedio.

## III. LE DIVISIONI

Non c'è dubbio che per lo scolaro medio la divisione sia l'operazione più temuta, e che un gran numero di esseri umani non saprebbe come farla senza il sussidio almeno una piccola calcolatrice.

Tuttavia, se i nostri antenati non avessero mai pensato ad inventare l'operazione inversa della moltiplicazione, che è la divisione, quasi certamente la matematica come scienza, arte, grande gioco non esisterebbe. Ci sarebbero solo delle tecniche per eseguire tre operazioni, che oggi sarebbero tutte eseguite da calcolatori elettronici. La divisione porta al concetto di divisori di un numero, di massimo comun divisore, e poi di numeri primi, che non hanno altri divisori oltre ad 1 e a se stessi. Una volta che incominciamo a parlare di numeri primi è come se una diga si sfasciasse, ed una folla di concetti nuovi si impone alla nostra riflessione.

Certo sapete che cosa sono i numeri primi (l'ho anche scritto poche righe fa). Io suppongo che sappiate già cosa sono. Poi nel corso del libro li vedrete rispuntare qua e là cucinati in varie salse. La mia speranza è che almeno una di queste salse vi sia gradevole.

Ora vorrei parlare di Massimo Comun Divisore (MCD) di due numeri.

Ci sono due modi di trovarlo. Uno è per pura forza bruta, e consiste nel paragonare le scomposizioni in fattori primi dei due numeri e tenere solo i fattori primi comuni. Anche questo metodo, inutile dirlo, ha le sue applicazioni. Per esempio dalla scomposizione di un numero in fattori primi possiamo ricavare – come vedremo - **quanti** sono i suoi divisori e qual è la loro **somma**.

Ma io vorrei discutere il metodo di Euclide per trovare il MCD, il quale dei due metodi è – penso - il meno intuitivo.
Supponiamo di voler trovare il MCD di 26 e 48. Si divide il maggiore, 48, per il minore, e si ottiene 1 con resto 22. Adesso arriva una frase che è comunemente imparata a memoria:"Il MCD di 48 e 26 è anche il MCD di 26 e del resto, 22". Allora applichiamo lo stesso metodo e dividiamo 26 per 22, troviamo 1 con resto 4. Ora il MCD di 48 e 26 è lo stesso MCD di 22 e 4. Dividiamo 22 per 4 e troviamo 5 con resto 2. Il MCD di tutti quanti è eguale a quello di 4 e 2. Dividendo 4 per 2 troviamo 2 con resto zero. 2, l'ultimo numero trovato prima del resto zero, è il MCD cercato, di 4 e 2, di 22 e 4, di 26 e 22, di 48 e 26.

Vediamo la frase che la maggior parte del genere umano studia a memoria. Il MCD dei due numeri dati è anche il MCD del resto della loro divisione e di uno dei numeri (in verità di entrambi).
Non è difficile però arrivarci. Se chiamiamo M il MCD di due numeri X e Y, abbiamo che X = A M, dove A è il quoziente della divisione di X per M, e anche Y=B M

Dunque
M divide X,
M divide Y,
M divide X+Y , perché X+Y= A**M**+BM= (A+B)M,

M divide X-Y, stesso ragionamento
M divide la somma o differenza di aX+bY, con a, b qualsiasi. aX+bY= aAM+bBM = (aA+bB)M.
M divide anche X-qY = AM-qBM = (A-qB)M

Ma se identifichiamo q con il quoziente di X e Y, X-qY non è altro che il resto R della divisione di X per Y. Infatti

$$\frac{X}{Y} = q \quad con\ resto\ R$$

Per fare la prova della moltiplicazione dobbiamo moltiplicare q per Y ed aggiungere il resto R, cioè X= qY+R, o X-qY=R.
Perché questo fatto ci serve qualcosa? Perché ad ogni passo i numeri di cui cerchiamo il MCD diventano più piccoli. Il MCD filtra attraverso tutte le operazioni fino a che resta da solo.

Facciamo la radiografia del metodo di Euclide supponendo di conoscere il MCD di 48 e 26,che è 2, e vediamo cosa succede nei vari passi.

| Operazione | Dividendo X | Divisore Y | Quoziente, q | Resto R=X-qY |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 48<br>= 2·24 | 26<br>= 2·13 | 1 | 48 – (1·26) = **22**<br>(2·24) - 1 (2·13)= 2(24-13)=<br>2·11 |
| 2 | 26<br>=2·13 | 22<br>=2·11 | 1 | 26 – (1·22) = **4**<br>(2·13)- 1(2·11)= 2(13-11)=<br>2·2 |
| 3 | 22<br>=2.11 | 4<br>=2·2 | 5 | 22 –( 4·5) = **2**<br>(2·11) - 5(2·2)=2(11-10) =2 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 0 |

La quarta divisione è 4/2 = 2, resto zero. Cioè abbiamo trovato che 2 è il **divisore** comune di 4, e di tutti i resti precedenti, fino ai due numeri iniziali.

Come minimo due numeri qualsiasi hanno 1 come divisore comune. Questo sarebbe il risultato delle nostre divisioni successive e diremmo che i due numeri sono **“primi fra loro”.** Proviamo con 13 e 7:

| Primo numero | Secondo numero | Primo resto | Secondo resto | Terzo resto |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 7 | 5 | 2 | 1 |

Nel terzo resto non c’è posto per altri fattori, e quindi i numeri sono primi fra loro.

Ma supponiamo che due numeri, per esempio 24 e 18 abbiano diversi divisori comuni (in questo caso 6,3,2). Chi ci assicura che con questo metodo troviamo il MCD? Il fatto è che **tutti** i divisori devono filtrare dai primi due numeri ai vari resti, in particolare il maggiore divisore di

tutti, e il processo termina di un colpo: tutti i divisori comuni devono restare fino alla fine, e non possono andarsene a poco a poco.

Una bella proprietà è che il MCD può essere scritto come una combinazione dei due numeri X, ed Y iniziali, cioè nella forma MCD = A X + B Y, dove A e B (che possono essere positivi o negativi) possono essere ricavati senza sforzo.

Supponiamo di prendere 48 e 26 come numeri di partenza.

Primo resto: 48 - 26 = 22
Secondo resto: 26 – 22 = 4
Terzo resto 22- 5 x 4 = 2.
Che è il nostro MCD.

| Primo numero | Secondo numero | Primo resto | Secondo resto | Terzo resto |
|---|---|---|---|---|
| 48 | 26 | 22 | 4 | 2 |

Cominciando dal fondo (e sarà sempre questa l'equazione su cui lavoreremo facendo continue sostituzioni, perché questa equazione parte bene ponendo **MCD = qualcosa**):

**2 = 22 –5 x 4**
Le regole del gioco sono:
1) Non spostare mai il MCD da sinistra. L'equazione deve sempre essere della forma: MCD = qualcosa
2) Quando riusciamo a trovare uno dei nostri resti (blu) dobbiamo lavorare su quelli, facendoli scomparire NON eseguendo le moltiplicazioni, ma sostituendoli dall'equazione precedente;
3) quando troviamo uno dei due numeri iniziali, ce lo dobbiamo tener stretto.

4 = 26-22
Sostituendo
2 = 22- 5 x (26-22) = 6 x 22 – 5 x 26

Resta ancora da liberarci di 22, che è 48 - 26
2 = 6 x (48-26) – 5 (26) = **6 x 48 – 11x 26.**

In effetti 288 – 286 fa 2.

Suggerisco di fare molti esercizi, perché è assai facile confondersi in questo calcolo. Ma non si può fallire se si tiene ben in mente l'obiettivo finale, di esprimere il MCD di X, Y come AX + BY.
Inoltre, questo risultato ci sarà utile diverse volte in seguito.

## IV. COMMENTO SULLE FRAZIONI.

Tutti impariamo le frazioni nelle scuole elementari per subito detestarle. Le regole del calcolo con le frazioni, che io non ho dato, sembrano fatte solo per complicare le cose e per affliggere la vita di innocenti scolari.

In realtà il problema è la somma o differenza delle frazioni. Una volta che abbiamo imparato quelle, il prodotto e la divisione non sono altro che giochetti.

Ma perché la somma è così complicata?
In generale l'esempio usa torte o pizze. Quanto fa 1/3 di torta più 1/5 di torta? Naturalmente possiamo prendere le due fette e metterle l'una accanto all'altra, o addirittura mangiarle.
Ma che succede se il fratello vuole la metà di 1/3+1/5 di torta? Ancora si può risolvere il problema dividendo separatamente in due il terzo e il quinto. E se abbiamo una torta non ancora tagliata?
Si divide idealmente il terzo in cinque parti e il quinto in tre parti. Con questo da una parte abbiamo 5/15 di torta, dall'altra 3/15. La somma è 8/15, un po' più di una mezza torta. Diviso due fa 4/15, la parte del fratello.

Sovente si invita lo studente a trovare prima di tutto il minimo comun denominatore. Secondo me non è necessario, a meno che il minimo comun denominatore non sia ovvio. Per esempio tra otto e quattro il minimo comun denominatore è 8. In ogni altro caso (in particolare i casi in cui dovremmo metterci a scomporre i due denominatori in fattori primi) è probabilmente più rapido accontentarci di un denominatore ottenuto semplicemente moltiplicando i due denominatori. Dopodiché si moltiplicano i due numeratori "incrociati". Se non ci mettiamo in testa che la regola è maligna, può anche piacerci per una certa sua bellezza:

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{D} = \frac{D + C}{CD}$$

$$\frac{a}{C} + \frac{b}{D} = \frac{aD + bC}{CD}$$

Ma se la regola non ci piace, senza dubbio ci chiediamo perché mai rimorchiarci le frazioni con le loro regole strane.

Intanto diciamo subito che le frazioni avevano un'importanza particolare quando non c'erano macchine per fare i calcoli. Delle quattro operazioni la più temuta è sempre stata la divisione, e diversi miliardi di persone al mondo oggi non hanno la minima idea di come si divida 53 per 24, se non c'è una calcolatrice a disposizione. E poi ci sono quei dannati numeri periodici che saltano fuori quasi sempre. Abbiamo l'impressione che a sommarli o sottrarli il risultato sia sempre impreciso, come è infatti.
Sia ben chiaro però che 1/3 non è altro che un modo di scrivere "1 diviso 3".
Ed 1/3=0.3333 (periodico); 1/5, invece, è 0.2 (non periodico).

Vogliamo sommare 1/3+1/5? Il nostro calcolatore fa la due divisioni, ottiene i risultati dati qui sopra (0,3333 e 0.20000) e infine ci dice che fa 0.533.
Su questo non ci piove, o ci piove poco.
Se avessimo dovuto seguire le regole imparate alle elementari che avremmo fatto, per sommare 1/3+1/5?
Avremmo trovato il minimo comun denominatore, che in questo caso è anche il prodotto dei denominatori, (15) e poi avremmo trasformato 1/3 in una frazione in quindicesimi (cioè 5/15) e gli avremmo sommato 1/5, scritto anch'esso in quindicesimi (cioè 3/15), quindi la somma, 8/15. Se ora dividiamo 8 per 15 troviamo 0.5333.
Ma perché andare a cercare tanti problemi con i minimi comuni denominatori eccetera?

Non trascuriamo l'uso di una calcolatrice, perché ci dà sempre un modo di verificare il risultato che troviamo. Se il problema era solo quello di eseguire il calcolo 1/3+1/5, direi che il risultato 0.5333 non può essere rifiutato da nessuno. In matematica bisognerebbe dare dieci a chi trova il risultato in un modo o nell'altro, e undici o dodici o tredici a chi lo trova in modo elegante.

Supponiamo poi che l'insegnante ci dica che vuole il risultato espresso in forma di frazione. Niente paura, abbiamo delle regole (generalmente non spiegate, ma magari vedremo in seguito) che ci dicono come tramutare un numero periodico in una frazione:
La regola generale é: **"scrivere antiperiodo e periodo uno dietro l'altro, sottrarre l' antiperiodo, e dividere per un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo"**, cioè nel nostro caso 0.5333= (53-5)/90 = 48/90 =(semplificando) = 8/15. Ma guarda!

Quindi in un modo o nell'altro ci arriviamo.
Allora, perché imparare tutto l'armamentario delle frazioni?

1. Anzitutto, e il motivo ormai non vale più, perché manipolando le frazioni con l'uso di operazioni generalmente semplici, si può arrivare ad un risultato finale espresso in forma di frazione, ed in pratica dovremo fare una sola divisione complicata alla fine del calcolo invece di molte divisioni strada facendo.

2. Secondo, perché così facendo non ci si devono portare appresso diversi numeri periodici le cui somme e differenze ci lasciano sempre insoddisfatti.

   Supponiamo di dover fare 2/3+1/3. Col calcolatore ci viene 0.99999, mentre usando le nostre frazioni ci viene (2+1)/3 = 1. Tra l'altro i matematici dicono che un numero della forma 0.99999 è uguale a 1. Perché? Provate a calcolare la frazione generatrice,
   Risposta: la frazione generatrice è 9/9 =1.

3. Terzo, perché i risultati sono più eleganti.
   Per esempio: uno scarico vuota un terzo di un serbatoio per ora. Quante ore ci vogliono per vuotare il serbatoio interamente? (**quanti terzi stanno in un'unità**?) Risposta

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

   Se non è già chiaro ora, comunque lo vedremo più avanti.

Ma supponiamo che uno scarico vuoti 3/5 di serbatoio per ora, in quante ore lo vuoterà del tutto? (Quante frazioni 3/5 stanno in un'unità?) Risposta:

$$\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Ora, 5/3=1.666 ore. Ma questo risultato, anche se giusto, non è molto chiaro. Il vantaggio a mantenere le frazioni è che 5/3=1+2/3, e siccome un'ora sono 60 minuti primi, 2/3 di sessanta minuti primi cioè $\left(\frac{2}{3}\right)60$ sono 40 minuti. Quindi un bel risultato pulito di un'ora e quaranta minuti.

4. Quarto, perché i metodi che si imparano possono essere utili anche in casi più complessi, per esempio quando nella frazione compaiono non più dei numeri ma delle lettere. In questo caso la calcolatrice non ci aiuta ed il calcolo con le frazioni è l'unico modo di procedere. .

Per esempio, vediamo il caso 1/3 - 1/5. Uno potrebbe dire che 1/3-1/5= 1/3 -1/(3+2). Questo è un caso particolare di una operazione più generale: 1/n-1/(n+2).

Se non cerchiamo quello che - come ho detto - secondo me è un eccesso di eleganza, un denominatore comune è sempre dato dal prodotto dei denominatori, in questo caso n(n+2). Non sarà forse il minimo comun denominatore, ma in genere va bene, e sovente va meglio così.

Ne risulta che:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$$

Adesso non dobbiamo fare altro che mettere al posto di n il numero che ci pare.

Con n=3 abbiamo 1/3-1/5= (applichiamo la formula trovata mettendo 3 al posto di n) 2/15

Con n=4: ¼-1/6 = 2/24, semplificando 1/12 (To', 12 era poi il minimo comun denominatore)

Con n=11, il risultato è 2/143.

Se avessimo usato una calcolatrice trasformando subito le frazioni in numeri decimali non avremmo trovato la legge generale.

Insomma, usare subito il calcolatore per fare tutte le divisioni ci porta al risultato, ma è un po' come se uno volesse studiare gli animali di una foresta e per far ciò entrasse nella foresta armato di uno schioppo e sparasse su tutto quel che si muove. Certo, si potrebbe poi portare a casa gli animali e impagliarli e studiarli, ma da morti, non da vivi. Le frazioni sono numeri vivi, la loro espressione decimale è un po' il cadavere .... che noi però resusciteremo più avanti, in modo, spero, sorprendente.

## V.   ANCORA SU COME BATTERE IL CALCOLATORE.

**Moltiplicazione di un numero per 11.**

Moltiplicare un numero - che chiameremo moltiplicando,  che vuol dire numero da moltiplicarsi - per 11 non è difficile. Con un po’ di esercizio si può ancora battere il calcolatore.
L'insegnante detta: "11 x 23477".
Incominciamo a scrivere **dal fondo**.

L'ultima cifra è l'ultima del moltiplicando.

…**7**.

La penultima cifra del risultato è la somma dell'ultima e della penultima cifra del moltiplicando: 7+7=14, scrivo **4** e riporto 1.

..(1)47

La terzultima cifra del risultato è il riporto più la somma della terzultima e della penultima del moltiplicando: 7+4=11 più 1 di riporto, 12. Scrivo **2** riporto 1.

..(1)247

La quartultima è la somma della terzultima e della quartultima del moltiplicando: 3+4, più 1 di riporto = **8**

…8247

La quintultima è 2+3 = **5 (il riporto è 0)**

..58247

La sestultima e prima cifra è 2+0 (davanti non ci sono cifre), **2**.

252847

Sembra complicato ma con un po’ di pratica è immediato.
Possiamo scrivere il prodotto appena l'insegnante ha finito di dettare il moltiplicando.
Il nostro risultato, scritto a cominciare dall'ultima cifra, è **258247**.
Occorre solo allenarsi a non perdersi per strada.

Naturalmente, la regola non è imprevedibile. Moltiplicare 23477 per 11 significa sommare:

```
 23477
23477
```

cioè proprio sommare le cifre del numero come ho detto.  Meno immediato è spiegare il cosiddetto criterio di divisibilità: un numero è divisibile per 11 se la somma delle cifre di posto

pari (incominciando da sinistra o da destra) è uguale alla somma delle cifre di posto dispari. Per 258247 si può verificare che  2+8+4= 5+2+7.

Anche questo, lo vedremo a suo tempo.

## VI . MA COME SI FA A RICORDARE I NUMERI?

Ci sono dei calcolatori prodigio che una volta visto un numero non lo dimenticano più per tutta la vita, senza il minimo sforzo. Molti di loro, però, sono incapaci di scrivere, e non riescono a ricordare le lettere dell'alfabeto. Una piccola memoria numerica l'abbiamo tutti, ma una grande memoria numerica è rara. Eppure sarebbe utile: Per esempio potremmo ricordare le date storiche, il numero d'ordine (numero atomico) degli elementi in Chimica eccetera. Per quanto ci riguarda potremmo ricordare i risultati parziali dei nostri calcoli. Per esempio io ho incontrato pochissime persone in grado di moltiplicare a memoria un numero qualunque di due cifre per un numero qualunque di due cifre, e nessuno che sapesse moltiplicare un numero di tre cifre per uno di tre cifre a memoria. Eppure l'unica difficoltà è quella di ricordare i prodotti parziali.

Un metodo comunemente usato è quello dell'alfabeto di consonanti. Dato che ricordiamo meglio le parole dei numeri, componiamo parole usando dieci consonanti per indicare le dieci cifre, e le vocali e le altre consonanti come jolly.

L'alfabeto è semplice:
1 è T (dimenticate il taglietto della T)
2 è n (due gambette)
3 è m (tre gambette)
4 è L (ci assomiglia, manca solo un trattino verticale)
5 è S (simile)
6 è b (simile)
7 è r (abbastanza simile)
8 è f (si pensi a un f corsivo)
9 è g (simile)
zero è c.

Esempio: Numero 134: TEMILO, TUA MELA, TEMILO, DATEMELO, TUO MIELE, TUO EMILIO, TOPO EMILIO, TOPI MILLE (le doppie valgono come una sola consonante, per aiutare i veneti).

Come ho detto, la memoria è un'arte e il metodo da me indicato più una certa pazienza permette di ricordare cose che sembrano impossibili. Ma non ci preoccupiamo di questo. Voi potete accontentarvi di tradurre i risultati parziali delle vostre operazioni a memoria in parole. Vedrete che la maggior parte di voi le ricorderà meglio dei numeri.

Vorrei fare un esempio, per quelli che magari poi ci prendono gusto. Si ricordi che le parole che scelgo per ricordare i numeri sono in genere una fra tante possibili.
Si voglia moltiplicare 47 x 68. Non abbiamo nessun trucco simpatico per farlo. Allora ricordiamo che 47 può essere, per esempio, la parola L'ORO (L'ARIA, L'IRA o anche LIRA etc), e 68 la parola BAFFO. Molte volte, nelle moltiplicazioni a mente ci si dimenticano proprio i due numeri iniziali.
Ora procediamo come di solito con l'operazione 7 x 68, cioè : 7 x8 = 56 (SABA), 7x6 = 42 (LANA). Ricordando queste due parole è facile sommare i riporti, col risultato 476, L'ORBO.

Ricordare bene questa parola, che ci serve dopo. Le altre le possiamo dimenticare.
Ora facciamo 4 x 68, cioè 4 x 8 = 32, MANO e 4 x 6=24, NULLA. Somma coi riporti = 272, ANDARONO. Anche questa parola va ricordata e va sommata (ma spostata di un posto a sinistra) a L'ORBO che avevamo trovato prima.
Quindi l'ultima lettera/numero è la B di L'ORBO. La penultima è N+R, cioè 9, G. Le ultime due lettere sono GB (GABBIA, etc.). Bisogna ora sommare L+R che fa 11, TT, TUTTA. Le ultime tre lettere sono T, G, B (TUA GABBIA). La prima è N + T di riporto, cioè M cioà 3.
Insomma, il totale è MIA E TUA GABBIA, 3196.

Vale lo sforzo? Difficile a dirsi. Io mi ci sono trovato bene. Altri trovano il procedimento grottesco, ma secondo me non sanno quel che perdono.

## VII. DIVISIONE SENZA CARTA E MATITA.

Sono rari i bambini che non capiscono che se una madre ha 10 euro e cinque bambini a ciascuno di quali vuole dare una stessa somma, per sapere qual è questa somma occorre semplicemente dividere 10 per 5, ottenendo 2, la somma che ciascun bambino ottiene. Questo viene semplicemente capito, e penso che se non ci fosse nella nostra testa un meccanismo che ci fa capire quasi immediatamente la soluzione, sarebbe assai difficile spiegarlo. Comunque l'idea che la divisione ci aiuti a fare parti eguali di una data quantità è abbastanza chiara.

Un fatto interessante è che c'è un mezzo pratico ( che per di più tutti conoscono) di dividere soldi in parti uguali in un gruppo di persone, anche se si hanno banconote e monete di diverso valore, e per di più senza usare carta e matita.
Supponiamo di dover dividere 500 Euro in tre parti. Senza fare nessuna operazione matematica si mettono 100 euro sul tavolo per Carlo, 100 per Giorgio, 100 per Simonetta. Ne restano 200. Che si fa? Si cambiano i 2 biglietti da 100 in quattro biglietti da 50. Il trucco è quello di avere sempre un numero di banconote o monete eguali, che sia eguale o superiore al numero di ragazzi, in questo caso 3 - altrimenti qualcuno resta senza. Ora si danno 50 euro per uno a Carlo, Giorgio e Simonetta. Restano 50 Euro da dividere. Cambiarli in biglietti da venti non serve perché ne otteniamo solo 2. Allora cambiamoli in biglietti da 10. Ne diamo uno per uno ai tre ragazzi e ci restano due biglietti da dieci, che divideremo in 4 biglietti da cinque. Ora diamo un biglietto da 5 a ciascuno dei tre ragazzi e ci resta un biglietto da cinque. A questo punto tutti hanno un biglietto da 100, uno da cinquanta, uno da dieci, uno da cinque, per un totale di 165 Euro e ci resta un biglietto da cinque. Ora cambiamo il biglietto da cinque in monete da un euro e ne diamo una per uno. Ce ne restano due. Le dividiamo in monete da cinquanta centesimi e ne diamo una per uno, con che ne resta una, che cambieremo in monete da dieci: ne daremo una per uno e ce ne resteranno 2, che cambieremo in quattro monete da cinque centesimi. Ne daremo una per uno, e ce ne resterà una. A questo punto la cambiamo in cinque monetine da un centesimo, ne diamo una per uno e ce ne restano 2. Di monetine più piccole non ce ne sono e ci fermiamo qui. Ma intanto il risultato è che tutti avranno una banconota da 100, una da cinquanta, una da dieci, una da cinque, una moneta da 1, una moneta da 50 centesimi, una da dieci, una sa 5, una da 1. Totale, 166 Euro e 66 centesimi (con un piccolo resto). Si può controllare che dividendo 500 per 3 si ottiene appunto 166,66.. Insomma, non abbiamo fatto nessuna operazione matematica, ma il risultato lo abbiamo ottenuto.
Non disprezziamo questo metodo, che sta alla base della divisione e vale anche lavorando con basi diverse da 10.

Se si fa bene attenzione, dividendo 500 per 3 con carta e matita si fa quasi esattamente lo stesso. La differenza è che abbiamo solo, per così dire, banconote e monete da 100, da 10, da 1 euro, 10 e da 1 centesimo. Niente banconote e monete da 50 o 20 euro, da 2 euro, da 50 centesimi etc.
Per avere il nostro risultato, prima si divide 5 per 3, si trova 1 con resto 2. Adesso si "abbassa uno zero". Questo equivale a dire che abbiamo "cambiato" le 2 banconote da 100 che ci restavano in 20 banconote da 10. 20 diviso 3 dà 6, con resto 2. "Abbassiamo" un altro zero, cioè cambiamo 2 banconote da 10 in 20 monete da 1 Euro. E via dicendo. Questo "abbassare" zeri corrisponde a cambiare una certa quantità di monete in monete di taglio dieci volte più piccolo.

Qualcuno potrebbe dire: "Ma perché non cambiamo direttamente 500 Euro in monetine da 1 centesimo? Nessuno ce lo vieta, e poi dando un centesimo a Carlo, uno a Giorgio, uno a Simonetta, e poi uno a Carlo, uno a Giorgio ed uno a Simonetta e così via, vedremmo che alla fine ciascuno ha 16666 centesimi con l'avanzo di due. Il risultato, evidentemente è lo stesso. Il solo problema è che usando subito unità di un centesimo ci occorrono 50000 centesimi e poi dobbiamo fare il giro di Carlo, Giorgio e Simonetta quasi 17000 volte. Ci vorrebbe un giorno a lavorare assai svelti, mentre usando unità intermedie la distribuzione la si fa in qualche minuto, a meno di dover andare ogni volta in banca a cambiare le banconote e le monete.

Questo, insomma, è il meccanismo della divisione. Se non perdiamo la testa possiamo imparare a fare divisioni in basi diverse, un’operazione che, vi garantisco, meno di una persona su mille sa fare al primo colpo.

Supponiamo di avere una nuova moneta, il Baiotto, che viene solo in banconote da 64, 8, 1 Baiotto e monete da 1/8 e 1/64 di Baiotto. (Un tempo c’erano monete che si chiamavano Baiocchi, ma erano diverse. Comunque, qualche bisnonno forse ricorda almeno il nome). Supponiamo di avere 2 banconote da 64 Baiotti e di volerle dividere per tre. Anzitutto le cambiamo in banconote da otto Baiotti. Quante saranno? Ogni banconota da 64 baiotti equivale a otto banconote da otto Baiotti e quindi avremo 16 banconote da otto Baiotti. Ne possiamo dare **cinque** per uno ai nostri amici e ci resta una banconota da otto. La cambiamo in otto banconote da un Baiotto. Ne diamo **due** per ciascuno agli amici, e ce ne restano 2. Adesso cambiamo i due Baiotti in monete da 1/8 di Baiotto, e ne avremo 16. Ne diamo **cinque** per uno ai tre, e ne resta 1. A questo punto ognuno ha 5 banconote da otto Baiotti, 2 da 1, 5 da un ottavo e resta una monetina da 1/8. Cambiamo in 8 monete da 1/64 e ne diamo due ciascuno. Ne resteranno due.

L’operazione che abbiamo fatto, in base 8, è la quasi impossibile (per la maggior parte del genere umano):

**200/3 = 52.52 con resto 0.02 (Base 8)**

Vedete un po’ se riuscite a ricostruire l’ultimo passaggio. Magari provare continuare a scrivere decimali, continuando a cambiare i resti in monete otto volte più piccole (supponendo che esistano).

Da notare che in base 8 le cifre sono solo da 1 a sette e abbiamo la corrispondenza:

| Base 10: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base 8: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

In base 8, 8 si scrive 10, 64 (=8 x 8) si scrive 100, 512 si scrive 1000 e così via. Mentre il numero “ABCD” in base 10 significa 1000A + 200B+10C+D, in base 8 significa 512 A + 64 B + 8C + D. Questo spiega perché abbiamo scritto 200 per indicare due banconote da 64 baiotti. Ritorneremo su questo concetto.

Con questa idea della distribuzione ben chiara come base della divisione, possiamo anche risolvere un problema che, sono certo, manderebbe in tilt quasi tutti gli adulti nel giro di un chilometro, perché hanno dimenticato come risolverlo. Il problema è quello della madre che, per

qualche ragione, vuole dare ad un figlio il doppio di caramelle dell'altro, per esempio perché uno è stato cattivo, o perché uno è più grande ed ha già una paga sua. Comunque vediamo come procede la madre che vuol fare questo tipo di distribuzione. è semplice, ad ogni giro dà due caramelle al figlio buono e una al figlio che l'ha fatta disperare. E così fino a che ha esaurito le caramelle. Dunque ad ogni giro dà tre caramelle, due all'uno, una all'altro. Quanti giri farà? Facile, si divide il totale per tre. Quindi sarà meglio se il totale sarà divisibile per tre, oppure la madre resterà con una o due caramelle che si mangerà lei. Se le caramelle sono 50, dividendo per tre si trova sedici con resto due, che la madre si tiene. Dunque sedici giri in cui il buono si prende 2 caramelle al giro, totale 32, ed il cattivo una per giro, 16 in tutto. Si può verificare che i numeri sono giusti. L'idea funziona anche se bambini sono tre (il buono, il brutto e il cattivo) o quattro o cinque.

In verità si può anche ragionare in altro modo: il bambino buono vale per due bambini. Quindi si fa come se la madre dovesse distribuire le caramelle fra tre figli. Alla fine della distribuzione restiamo con tre mucchietti eguali di caramelle, e il buono ne piglia due.

Cioè un simile problema che è un po', solo un po' meno immediato: è il caso in cui la mamma vuol dividere le caramelle in modo che alla fine della distribuzione uno dei due figli ne abbia, per esempio, 5 più dell'altro. Qui l'idea della distribuzione non va tanto bene. Pensateci un momento. Per esempio, ci sono 35 caramelle, e la mamma ne vuol dare ad un figlio cinque più che all'altro. E' solo alla fine che vedremo se la distribuzione è stata fatta come volevamo.

Ma è proprio vero che lo si può vedere solo alla fine? Qui c'è una specie di blocco mentale in azione. Se la madre desse subito le cinque caramelle a Giorgio, resterebbe poi con trenta caramelle che potrebbe dividere in parti eguali tra Giorgio e Carlo.

Altro modo:
Le caramelle di Carlo sono eguali al numero di caramelle di Giorgio meno cinque. Quindi Giorgio+ Carlo= Giorgio + Giorgio - 5 = 35.
Dunque, se alle 35 caramelle aggiungessimo le cinque che mancano a Carlo, ne avremmo 40, ed i due figli avrebbero lo stesso numero di caramelle di Giorgio. Questo stesso numero è dato da 40/2, cioè 20. Quindi Giorgio ha 20 caramelle e Carlo ne ha cinque in meno, cioè 15. E i conti tornano, cioè le caramelle sono sempre 35.

Ma torniamo al problema generale. Dividere somme di denaro in parti eguali richiede una divisione e, come ho detto, quasi tutti ci arrivano subito.
Curiosamente, il problema inverso lo si incontra assai più sovente, travestito in diversi modi. Il problema é: se una mamma ha 1000 euro e si trova a dare 200 euro per figlio senza che avanzi niente, quanti figli ha? La risposta è 1000 diviso 200, cioè 5. E' come se la mamma avesse di fronte a sé un certo numero di cassetti, uno per figlio. Mette 200 euro nel primo, 200 nel secondo, 200 nel terzo...duecento nel quinto cassetto ed ha finito i soldi. Dunque può riempire solo cinque cassetti. Se tutti i figli hanno la stessa somma e nessuno resta a bocca asciutta, vuol dire che i figli sono cinque.

Questo problema così formulato non sembra di grande utilità, anche perché di solito le madri sanno quanti figli hanno. Ma, come ho detto, ci sono altri problemi che richiedono la stessa operazione.

## VIII. UNA BELLA FAMIGLIA DI PROBLEMI.

Mia madre mi diceva sempre. *A me la matematica piace, ma non mi parlate di lavandini che si riempiono e di treni che si corrono incontro*.

Esempio. Un treno va a 100km/ora. Quanto ci mette a fare 800 km? Abbiamo un certo numero di cassetti (le ore) ed in ognuno mettiamo 100 km. Ne riempiamo 8. Dunque ci sono 8 cassetti, otto ore (cioè 800/100).

Un rubinetto versa 10 litri al minuto. Quanti minuti ci vogliono a riempire un serbatoio di 100 litri? Risposta, 10 minuti, cioè 100/10.

Una segretaria prepara al *word processor* venti pagine all'ora, quante ore ci vogliono a preparare 100 pagine? Risposta, cinque ore.

Abbiamo una regola generale: il tempo per eseguire un compito è dato dalla quantità totale del compito da svolgere diviso per la velocità con cui il compito viene svolto. La velocità la possiamo vedere come la “quantità per unità di tempo”.

**Tempo necessario = (quantità totale) diviso (velocità).**

E divertitevi a ricavare le operazioni inverse. Ce ne sono solo 2:
Quantità Totale = Tempo per velocità
Velocità = Quantità Totale diviso tempo.

Supponiamo ora di complicare un poco il problema. Un rubinetto riempie un quinto di un serbatoio ogni ora. Quante ore ci vogliono per riempire il serbatoio? Abbiamo l'impressione che manchi qualche dato. Per esempio, quanto è grande il serbatoio. In realtà troveremo una soluzione indipendente dalla grandezza del serbatoio. Se il serbatoio è di 1000 litri, il rubinetto ne versa 1/5, cioè 200 ogni ora, ed impiega 1000/200 = 5 ore. Se il serbatoio è di 5 litri, il rubinetto versa 1/5, cioè 1 litro per ora, ed anche qui impiega 5 ore.

Abbiamo almeno un paio di modi per risolvere il problema :

Primo modo: dividiamo il totale (cioè 1) per la velocità ( 1/5) ed applicando le nostre belle regole delle frazioni, troviamo che 1 diviso 1/5 = 5 (quante volte sta 1/5 in 1, quanti quinti ci sono in 1). O anche, per pura forza bruta, 1/5=0.2 e dividendo 1 per 0.2 si trova 5.

Secondo modo: Dato che il problema e la soluzione non dipendono dalla capacità del serbatoio, prendiamo un serbatoio che ha una capacità conveniente, per esempio un numero divisibile per 5. Per esempio, il nostro serbatoio sia di 5 litri. Ogni ora se ne riempie 1/5, cioè 1 litro. Qui siamo tornati al problema della madre della quale non conosciamo il numero di figli. Per la nostra accurata scelta, la divisione è facile, 5/1 =5.

Il problema si complica, ma non tanto se non perdiamo la testa, se i rubinetti sono due, uno che

versa 10 litri all'ora, l'altro che ne versa 20. Quante ore ci vogliono a riempire con i due rubinetti un serbatoio di 300 litri? I due rubinetti insieme equivalgono ad un rubinetto che versa 30 litri all'ora, per cui insieme impiegheranno 10 ore. Notate che uno impiegherebbe 30 ore, l'altro 15, per cui il risultato è tutt'altro che intuitivo.

Introdurre degli scarichi non complica le idee più di tanto. **Uno scarico è come un "rubinetto negativo".**

Quindi se ci sono un rubinetto da 30 litri/minuto, uno da 15 litri/minuto e uno scarico da 25 litri/minuto, tutti quanti equivalgono ad un rubinetto da 20 litri/minuto. Se invece lo scarico fosse da 50 litri/minuto, l'insieme equivarrebbe ad un rubinetto da -5 litri/minuto, cioè sarebbe uno scarico e il lavandino non si riempirebbe mai. Tutt'al più potremmo avere un problema realistico considerando che nel serbatoio ci siano già in partenza per esempio 60 litri, e domandandoci quanto tempo ci vuole a svuotarlo.

Il massimo della difficoltà di questo tipo di problemi lo si ha quando invece di sapere che un rubinetto versa 10 litri all'ora sappiamo che esso versa 1/30 di serbatoio all'ora e l'altro versa 1/15 di serbatoio all'ora.
Possiamo di nuovo agire in tre modi.
La velocità combinata dei due rubinetti è 1/30+1/15 = 3/30 = 1/10 di serbatoio all'ora, e quindi occorreranno dieci ore.
Secondo modo: scegliamoci un serbatoio che abbia una capacità qualunque che ci convenga, cioè un numero divisibile tanto per 30 quanto per 15, tipo 450 (il modo più semplice per ottenere un numero divisibile per due numeri diversi è farne il prodotto), notare che il primo rubinetto versa 450/30 = 15 litri all'ora, l'altro 450/15, cioè 30 litri all'ora, insieme versano 45 litri all'ora e 450/45 ci dà ancora 10 ore.
Infine, se si vuol fare il calcolo con la forza bruta, si calcola 1/15=0,06666; 1/30 = 0,0333.
Si somma e si ottiene che i due rubinetti combinati 0,09999, si fa il rapporto totale/ velocità e si trova un valore assai vicino 10 (a parte gli arrotondamenti che avremo messo nei risultati.
Quindi il tempo combinato impiegato a fare un lavoro da due segretarie che lo farebbero l'una in 1 giorno e l'altra in cinque, o da due imbianchini che imbiancherebbero un moro uno in tre giorni e l'altro in otto eccetera, sono problemi affini. E quando si incontrerebbero due treni che compirebbero l'uno un percorso in un'ora e l'altro in due?

## IX. ALGEBRA

La maggior parte del genere umano si imbatte nella matematica solo perché quest'ultima la aiuta a risolvere problemi. E' anche per questo che esiste la matematica. E noi abbiamo visto come risolvere un certo numero di problemi.
Alcuni dei metodi di soluzione che abbiamo esaminato sono ingegnosi, anche se nessuno dei problemi era veramente difficile.
Ma a prima vista non c'è molta somiglianza tra due treni che si corrono incontro o due segretarie che lavorano insieme, o dei rubinetti che riempiono un serbatoio.
Però le soluzioni seguono lo stesso schema matematico.
E questa è una straordinaria proprietà della matematica. Problemi diversi hanno la stessa struttura matematica. Non occorre imparare mille metodi, uno che si applica a rubinetti che riempiono serbatoi, uno che si applica a imbianchini che imbiancano una casa, uno che si applica a meccanici che riparano un'auto o segretarie che battono al *word processor* un libro.

Di fronte a questa situazione i matematici si misero a pensarci ed escogitarono una sorta di meccanismo in cui si infilano i dati da una parte, la macchina (che poi siamo noi) ci lavora senza preoccuparsi di cosa significhino, e dall'altra parte saltano fuori le soluzioni. Il problema, naturalmente, è quello di introdurre i dati come la macchina li vuole. Un rubinetto versa in un serbatoio mezzo litro ogni dieci secondi. Il serbatoio tiene trenta litri. Quanti minuti ci vogliono a riempire il serbatoio? Qui ci sono in realtà due semplici problemi. Uno è il problema di concetto "come si fa a calcolare il risultato", e l'altro è un problema di unità: "convertire i secondi in minuti".

In generale, ad un certo punto della propria vita quasi tutti si studia quella che, con parola araba, è detta "algebra". Si tratta di una macchina che quasi automaticamente opera sulle cosiddette equazioni, che sono costituite da un'espressione a sinistra (primo membro), un segno "=" e un'espressione a destra (secondo membro).
Tutto l'ingegno necessario, che talvolta non è poco, sta nel mettere il problema in forma di equazione.

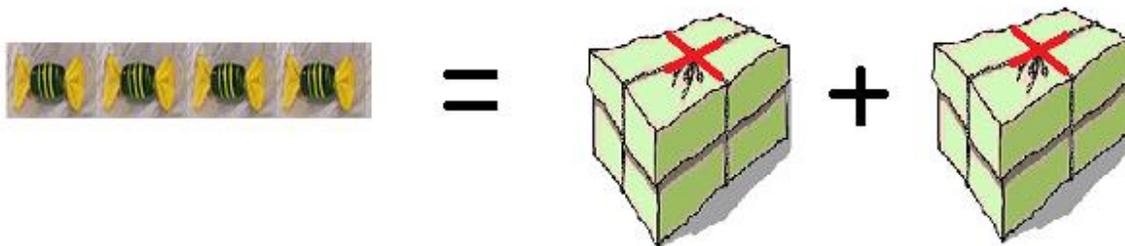
Supponiamo che la mamma dica a Francesco e Giacomo: "A Francesco do cinque caramelle ed a Giacomo do tre caramelle più una scatolina chiusa in cui ci sono le caramelle rimanenti. State tranquilli, avete lo stesso numero di caramelle". "Avete lo stesso numero di caramelle" significa Mettere un segno "=" in mezzo tra le caramelle di Francesco, a sinistra, e quelle di Giacomo, a destra.

Ora, quando Giacomo guarda quello che c'è nella scatola, sa benissimo che cosa aspettarsi. Se ci sono meno di due caramelle sa di esser stato ingannato. Uno studioso di algebra direbbe che lui ha già risolto l'equazione

$$5 = 3 + x$$

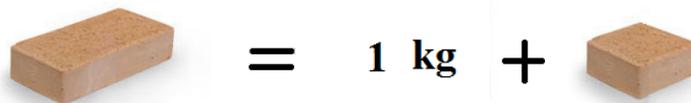
E come ha fatto ? Per noi ha semplicemente fatto la sottrazione 5-3.
"No, direbbe lo studioso di algebra. Giacomo ha trasportato 3 al primo membro cambiando segno, perché la regola n.1 dell'algebra dice che una quantità può essere trasportata da un membro all'altro dell'equazione purché le si cambi il segno". Sarà così che si fa, ma a me pare meglio dire che dato che le due quantità di destra e di sinistra sono eguali (così ci dice il segno "="), esse restano eguali aggiungendo e togliendo una qualsiasi grandezza (nota o ignota) da entrambe le parti. Per esempio togliamo 3, con cui a destra ci resta solo la scatolina. E a sinistra?

$$5 - 3 = x$$

Se poi la mamma ha dato quattro caramelle a Francesco e due scatoline eguali a Giacomo, dicendogli che ha tante caramelle quante ne ha Francesco, Giacomo sa che deve aspettarsi due caramelle per scatola.

Ora Giacomo ha risolto l'equazione

$$4 = 2x$$

E come ha fatto? Ha diviso per due le caramelle di Francesco, ha ottenuto 2, che dovrebbe essere il contenuto di ogni scatola.
"No, direbbe lo studioso di algebra. Giacomo ha diviso ambo i membri per due, perché la regola n.2 dell'algebra dice entrambi i membri possono essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero". Di nuovo, sarà così che si fa, ma a me pare meglio dire che dato che le due quantità di destra e di sinistra sono eguali (così ci dice il segno "="), restano eguali dividendo entrambe le parti per uno stesso numero.

Vediamo un problema che può mandare in buca i disattenti.
"Un mattone pesa un kilo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?"

Il bello dell'algebra è che possiamo trasportare da una parte all'altra del segno eguale – cambiando segno - non solo quantità note come avevamo fatto con 3 caramelle, ma anche quantità ignote, come il mezzo mattone di cui non conosciamo il peso.
Trasportando e cambiando segno otteniamo

cioè

$$x - 1/2\, x = 1$$

Ma $x - ½\, x = ½\, x$, per cui abbiamo

$$½\, x = 1$$

(Cioè apprendiamo che mezzo mattone pesa 1 kg).
E adesso, moltiplicando a sinistra e a destra per 2:

$$x = 2$$

Cioè il mattone pesa due kg.

Uno studioso di algebra raccomanderebbe di portare tutti i termini dell'equazione al primo membro in modo da averla in forma standard, cioè

$$ax + b = 0$$

Dove *a* e *b* sono quantità note, e *x* è l'incognita.
Per il primo problema di Giacomo e Francesco avremmo

$x - 2 = 0$, con $a=1$ e $b =-2$

Per il secondo problema:

$2x - 4 = 0$, con $a=2$, $b = -4$

Per il problema del mattone:

$\frac{1}{2}x - 1 = 0$, con $a=1/2$, $b = -1$.

Una volta raggiunta la forma standard, si gira la manovella e viene fuori la soluzione applicando la formula risolutiva (che deriva dalle due regole dell'algebra):

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

Mettete le $a$ e le $b$ giuste nella formula risolutiva e verificate i risultati. Un'equazione che può esser messa nella formula $ax + b = 0$ si chiama equazione di primo grado in un'incognita, la $x$.

Per quelli che si appassionano a queste cose diremo che qui x appare AL MASSIMO alla prima potenza e quindi l'equazione è detta di primo grado.

Se x apparisse al massimo alla seconda potenza, avremmo un'espressione tipo

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

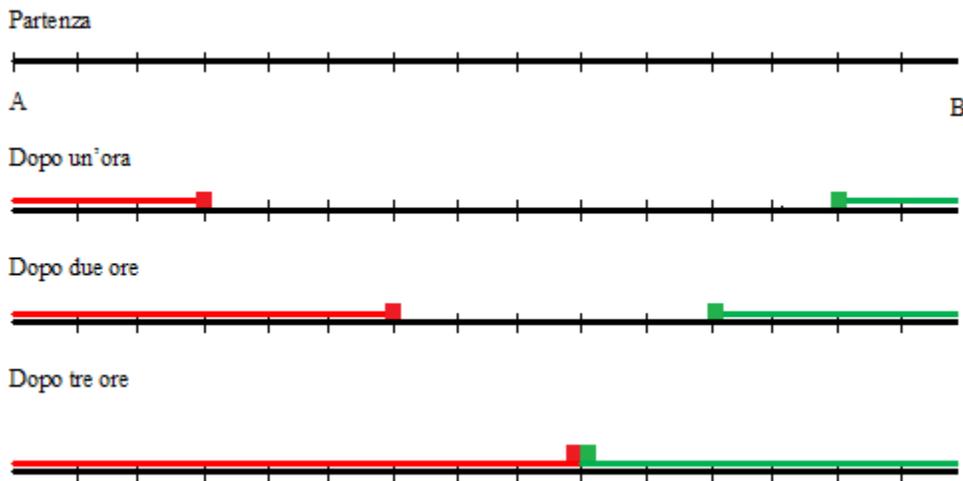
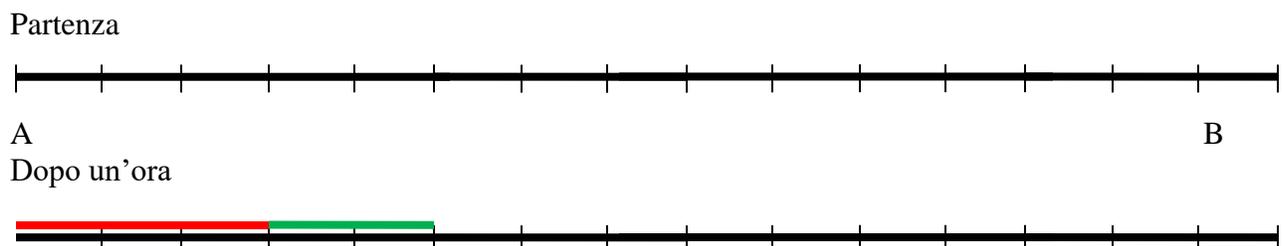
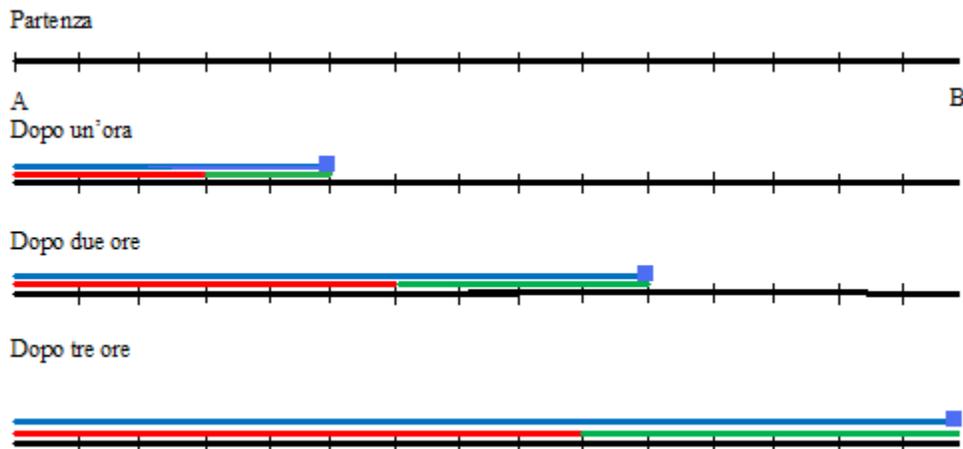
che si chiama "equazione di secondo grado" e ha anche lei la sua formula risolutiva, che si impara a memoria, o si ricava in qualche modo.

Fin qui ci si era arrivati nel Cinquecento, quando matematici Italiani trovarono le formule risolutive per le equazioni di terzo grado e di quarto grado.

Ma questo punto ci si fermò.

## X. TRENI CHE SI CORRONO INCONTRO

I treni che si corrono incontro non sono meno temibili, ma fanno parte della stessa famiglia.
Un tratto di ferrovia da A a B è lungo 150 km. Un treno parte da A e va a 30 km/ora, un secondo treno parte da B e va a 20 km/ora. Dove e dopo quanto tempo si incontrano?

Il problema non è banale, ma lo si può risolvere in vari modi.
Intanto possiamo fare una simulazione. Chi sa disegnare , non dico bene, ma accuratamente, ha il gioco facile, come vedremo anche in seguito.
Proviamo a fare un diagramma:

Dopo un'ora le distanze percorse sono: 30 km treno rosso a sinistra, 20 km treno verde a destra**. I treni, beninteso, non sono il segmento intero, ma solo l'estremo**. Restano 100 km tra i due treni
Seconda ora: 60 km a sinistra, 40 km a destra. Restano 50 km fra i due treni.
Terza ora: 90 km a sinistra, 60 a destra, i due treni si incontrano.
Dunque si incontrano in tre ore.
Soluzione perfettamente accettabile.
Riesaminiamo il problema. Adesso spostiamo nel diagramma i tratti percorsi dal treno di destra dalla parte del treno di sinistra. A destra rimane lo spazio tra i due treni, ora per ora: è chiaro che anche in questo caso quando lo spazio sarà ridotto a zero i due treni si incontreranno.

Il problema non è cambiato, ma incominciamo a vedere un secondo modo, forse più soddisfacente,  di risolverlo. Infatti, se non distinguiamo più i due treni (sostituiamoli con un unico treno blu), vediamo che il problema è lo stesso che chiedere quanto impiegherà un treno che va a 20+30=50 km/ora a compiere l'intero percorso di 150 km. Strano, vero?  Eppure il diagramma ci dice proprio questo.

Ma il problema così concepito è banale. Ci vorranno tre ore.

A questo punto sapremo anche dove si incontreranno i due treni: in tre ore il treno rosso avrà percorso novanta km, e quello verde sessanta, come avevamo visto dal diagramma.
Il problema viene risolto facilmente se prima calcoliamo il tempo e poi lo spazio percorso.

Se complichiamo il problema dicendo che una mosca che va a 100 km/ora parte con uno dei due treni e poi va dall'uno all'altro fino a che viene schiacciata al loro incontrarsi, troviamo subito le risposte: quanto vola la mosca e quanti km ha fatto.

Vedete subito un fatto che a prima vista sembra strano ma dopo tutto  non lo è: la velocità della mosca non ha nessun influsso sul momento in cui i due treni si incontrano, che è determinato dalla sola velocità dei treni ed è sempre  tre ore. In tre ore, se la mosca va a 100 km/ora, essa percorrerà  300 km. Se volerà a  mille km/ora percorrer 3000 km. Semplicemente farà più o meno percorsi avanti e indietro, ma volerà comunque tre ore.

E a questo punto diventa ovvio risolvere il problema dei due treni, uno dei quali percorre 1/3 del cammino in un’ora e l’altro in 1/4 di ora.

In che senso ho detto che il problema dei treni che si corrono incontro è simile a quello di due rubinetti che vuotano un serbatoio? Se guardate bene è come se i due treni dovessero “vuotare” la distanza tra loro ( 150 km), uno vuotandola a 30 km/h, l’altro a 20 km/h.  O no?

## XI. UNITA’ DI MISURA

Quando ci viene richiesto di eseguire un calcolo di natura non astratta, sovente il risultato va espresso in quantità che hanno delle unità di misura. E assai sovente la conversione delle unità è lo scoglio su cui affondano persone che in fondo hanno risolto il problema. E questo è stupido.

Anzitutto, bisogna ricordare che se abbiamo l’equazione :

(qualcosa) = (qualcos’altro)

Sia il “qualcosa” che il “qualcos’altro” devono essere espressi nelle stesse unità di misura.

In secondo luogo, per sbagliare meno, è bene avere un’idea del risultato. Se ci viene chiesto a che velocità va in km/ora un centometrista che fa 100 metri in dieci secondi, è chiaro che abbiamo fatto uno sbaglio da qualche parte, se ci viene come risposta 1Km all’ora, o 300 Km all’ora. La prima velocità è troppo bassa, perché 1 Km all’ora vuol dire 1000 m in 60 minuti, 100 metri in sei minuti, mentre sapevamo che ci ha messo 10 secondi; la seconda è troppo alta, perché un centometrista non va alla velocità di una Ferrari. Quindi un po’ di buon senso non guasta.

Coloro i quali hanno inventato le unità di misura, poi, non erano stupidi ed hanno cercato di creare un meccanismo che rendesse facile la conversione delle unità.

Il primo concetto fondamentale è che

**l’espressione 1 metro al secondo si scrive 1 metro/secondo o 1 m/s.**

Quella frazione è il trucco principale, che del resto è ragionevole, perché la velocità la si ottiene dividendo i metri percorsi per i secondi impiegati.

Il secondo concetto è che si possono eseguire i calcoli con le unità di misura come se fossero delle quantità qualsiasi che si combinano fra loro secondo le quattro operazioni (e altre se è necessario).
Un quadrato “2 m × 3 m” va quindi scritto come (2 m)(3 m)= 6 ($m^2$).

La regola più utile a questo livello è quella secondo cui moltiplicando e dividendo un numero per uno stesso numero (o meglio “per uno stesso qualcosa”) il valore non cambia.

Convertire 100 km/ora in metri/secondo diventa semplice scrivendo:

$$100\,\frac{\mathbf{kilometri}}{metri}\,metri\,\frac{1}{\left(\frac{\mathbf{ore}}{secondi}\right)secondo}$$

~~Cioè  abbiamo moltiplicato sopra e sotto per metri, e , al denominatore, sopra e sotto per secondi.~~
Adesso tutto il trucco sta nel convincersi  che

$$\frac{kilometri}{metri}$$

è anche lui un **numero**. Infatti noi  sappiamo che 1 km = 1000 m, cioè  **1 km/1m =1000**.
Allo stesso modo, 1 ora =3600 secondi, cioè  **1 ore/1secondo = 3600**

$$100\,\frac{km}{ora} = \;\; 100\,\frac{1000}{3600}\,\frac{metri}{secondo} = 100\;\times 0.0278\,\frac{metri}{secondo} = 27.8\,\frac{metri}{secondo}$$

I conti tornano perché vediamo che un’auto è circa tre volte più veloce di un centometrista ben allenato. Potremmo segnarci da parte il cosiddetto fattore di conversione per passare da km/ora a m/sec, che è 0.0278. Oppure ce lo possiamo ricavare ogni volta.

Fino al liceo non si incontrano conversioni di unità molto diverse da queste.  Ma il trucco è sempre quello**:** se vogliamo convertire 85 kg in grammi, dobbiamo ancora scrivere:

$$85 \times \left(\frac{kilogrammi}{grammi}\right) \times grammi$$

E sappiamo che 1 kilogrammo = 1000 grammi, cioè  1 kilogrammo/grammo =1000, quindi 85 kilogrammi = 85×1000 grammi.

Ma un quadrato di 2 metri di lato, totale 4 $m^2$,  a quanti $cm^2$ corrisponde? Provate a scrivere

$$m^2 \;\; = \; \mathrm{m} \; \times \mathrm{m} \;\; = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}\right) \mathrm{cm} \; \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}\right) \mathrm{cm} \;\; = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}}\right)^2 \mathrm{cm}^2 = \cdots$$

**Nota: Una confusione propria della lingua italiana.**
Ci sono dei problemi che confondono le idee per una questione di linguaggio. Supponiamo di avere un leone che divora una gazzella ogni due giorni. Le nostre unità di misura divengono leoni, gazzelle,  giorni.  L’equazione di base è:

$$1\;leone \; = \; \frac{1\;gazzella}{2\;giorni}.$$

Come abbiamo detto, si può giocare fin che si vuole con numeri e unità.
Per esempio si può scrivere

$$1\;gazzella = 2\;giorni \;\; \cdot 1\;leone.$$

Cioè a noi non importano nulla i sentimenti della gazzella o quelli del leone, né di che colore siano. Per noi i leoni mangiano solo gazzelle, e le gazzelle si fanno mangare dai medesimi. Ci importa solo che una gazzella è sbrigata in 2 giorni·leone. La confusione sorge se diciamo “due giorni per leone”, che suggerisce di spostare i leoni al denominatore. Per nulla. Ma scrivendo correttamente, diviene facile risolvere il problema: quanto leoni ci vogliono per mangiare 8 gazzelle in 4 giorni? Se ogni gazzella equivale a 2 giorni leone, 8 gazzelle equivalgono a 16 giorni leone. Se i giorni sono 4, i leoni saranno anche 4, perché il prodotto giorni· leoni deve dare 16.
Allora come si risolverà il tipico indovinello: **se 7 scimmie mangiano 7 banane in 7 minuti, in quanti minuti 21 scimmie mangereanno 21 banane?**

L’equazione da cui partire è

$$7\ scimmie = \frac{7\ banane}{7\ minuti}$$

Ovvero 1 banana = 7 minuti·scimmia.
Moltiplichiamo per 21.

Abbiamo 21 banane = 147 minuti ·scimmia.
Dunque il prodotto di scimmie per minuti deve dare 147. Ma il problema ci dice che le scimmie sono 21, quindi i minuti sono 147/21 =7.

Del resto non era una cosa così difficile: il fatto che sette scimmie mangiassero sette banane in sette minuti voleva dire che ciascuna mangiava una banana in sette minuti. E quindi 21 scimmie mangiano 21 banane in sette minuti.

## XII. LA VECCHIA FATTORIA

Il problema che arriva adesso è molto più interessante di quel che non sembri a prima vista. L'idea è semplice. Nella vecchia fattoria ci sono conigli, cioè quadrupedi, e oche, cioè bipedi. Ci sono 20 teste e 50 zampe. Quanti sono i conigli, quante le oche? Naturalmente tutti i conigli hanno quattro zampe e tutte le oche due.

Questo problema è un problema difficile, lo dico subito. Ma non del tutto. Intanto possiamo costruire uno schema per andare a tentativi.

| conigli | oche | teste | zampe |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6 |

Così non va bene, perché non teniamo subito conto del fatto che le teste rappresentano il numero di animali. Quindi se c'è un solo coniglio dobbiamo avere 19 oche, altrimenti il sistema funziona lo stesso, ma è più lungo.

Facciamo dunque una tabella tenendo conto del fatto che ci sono 20 animali.

| teste | conigli | oche | zampe |
|---|---|---|---|
| **20** | 0 | 20 | 40 |
| **20** | 1 | 19 | 42 |
| **20** | 2 | 18 | 44 |
| **20** | 3 | 17 | 46 |
| **20** | 4 | 16 | 48 |
| **20** | 5 | 15 | 50 |
| **20** | 6 | 14 | 52 |
| **20** | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| **20** | 19 | 1 | 78 |
| **20** | 20 | 0 | 80 |
| | | | |

La risposta già l'abbiamo, e se anche la si trova così non vedo perché la dovremmo disprezzare. Ma intanto da questo esame vediamo diverse cose:

1) Costruendo la tavola vediamo che quando aumentiamo di uno il numero di conigli e quindi diminuiamo di uno il numero di oche, il numero di zampe aumenta di due. Non c'è niente di strano, un coniglio ha una sola testa come un'oca, ma ha due zampe più di un'oca.
2) Il numero di zampe non può mai essere minore di 40 (nel caso di tutte oche, perché ogni animale è come minimo un'oca e quindi ha almeno due zampe). D'altra parte il massimo numero di zampe è 80, che si raggiunge solo se abbiamo unicamente conigli nella vecchia fattoria.
3) Siccome tutti gli animali contribuiscono un numero pari di zampe (o due o quattro), la somma delle zampe sarà anche un numero pari.

Quindi **non ci sono soluzioni** se, date 20 teste, ci sono:
a) meno di 40 zampe
b) più di 80 zampe
c) un numero dispari di zampe, anche se compreso fra 40 e 80.

Ma c'è un modo di trovare che per avere 50 zampe occorrono appunto quindici oche e cinque conigli?

La risposta è interessante. Qui vedremo il metodo più semplice, che, tra l'altro non è sempre adottabile. Poco oltre ne vedremo altri più generali e più complicati, che aprono uno spiraglio su campi molto avanzati della matematica.
Ora questo è il nostro metodo. Molto sovente in matematica si fa un tentativo estremo e si vede che succede. In questo caso ci chiediamo: se fossero tutte oche, quante zampe avremmo? 40. Invece ne abbiamo 50. Dividiamo il numero extra di zampe (10) per la differenza in numero di zampe fra un coniglio e un'oca (2), perché ogni coniglio contribuisce solo due zampe in più. Il risultato è 5. Cioè le dieci zampe che ci sono in più appartengono a cinque super-oche che hanno quattro zampe. Queste super-oche sono appunto i conigli. Quindi abbiamo cinque conigli e le teste rimanenti (15) sono teste di oche.

Avremmo anche potuto dire: se gli animali fossero tutti conigli, le zampe sarebbero ottanta. Mancano 30 zampe, appartenenti a quindici mezzi conigli mancanti. Quindici dei venti conigli sono quindi solo mezzi-conigli, con una testa e due zampe, cioè oche.

## XIII. ANNOTAZIONE

Un numero **pari** può sempre essere espresso nella forma 2n; un numero esprimibile nella forma 2n è sempre pari. Qualunque sia n.
Un numero dispari è sempre esprimibile nella forma 2n+1.

La somma di due numeri pari è un numero pari: difatti $2n+2m= 2(n+m)= 2M$, chiamando M la somma di m+n.

La somma di due numeri dispari é....un numero pari: 2n+1+ 2m+1= 2(n+m)+2=
2 (n+m+1)= 2M, chiamando M la somma m+n+1.
.
E il quadrato di un numero pari (2n × 2n), che peculiarità ha? E quello di un numero dispari (2n+1)(2n+1)?
E la somma dei quadrati di un numero pari e di un numero dispari?

## XIV. TORNIAMO ALLA FATTORIA

Ci sono problemi simili, o il nostro metodo vale solo per oche e conigli? Naturalmente, potremmo avere struzzi ed elefanti, ma non è che le cose cambino molto.

Ma ci sono altri esempi. In tasca abbiamo biglietti da dieci e da 5 euro, in tutto 14, per un totale di **cento euro**. Quanti sono i biglietti da cinque e quanti i biglietti da dieci? Con il metodo indicato sopra vediamo subito (lo si può fare a memoria) che ci sono **otto biglietti da cinque e sei biglietti da dieci.**

Ma supponiamo di avere anche dei biglietti da 20 euro.

Qui vediamo che il problema si complica e diviene indeterminato, nel senso che ha più di una soluzione.
Supponiamo che ci sia un biglietto da venti tra i nostri 14: allora dovremmo distribuire 13 biglietti da 10 e da 5 in modo da avere 80 euro: risposta col metodo di cui sopra (risolvere a memoria!!): abbiamo 10 biglietti da 5 e 3 da 10. Prima soluzione.
E che succede se abbiamo due biglietti da venti? Adesso dobbiamo distribuire 12 biglietti da 5 e da 10 in modo da avere 60 euro. Qui abbiamo 12 biglietti da 5 e zero biglietti da 10.
Con tre biglietti da venti non cioè nessuna soluzione, perche ci restano 11 biglietti che devono valere 40 euro, e 11 biglietti da cinque (quelli di minor valore) valgono 55 euro.

Abbiamo dunque tre soluzioni egualmente accettabili:
**0 da venti, 6 da dieci, 8 da cinque;**
**1 da venti, 3 da dieci, 10 da cinque**
**2 da venti, 0 da dieci, 12 da cinque.**

Se chi ci assegna il problema ci indica che dobbiamo avere almeno un biglietto per specie, allora solo la seconda soluzione è accettabile. Questo naturalmente dipende dalla particolare scelta di numeri fatta nell'assegnare il problema. Con altro numero di biglietti o altra somma totale avremmo potuto avere un numero maggiore o minore di soluzioni accettabili.

Se il problema è presentato come indovinello, normalmente ci si dice:
Ho 100 euro in biglietti da cinque, da dieci e da venti. Poi do un biglietto da venti, uno da dieci e uno da cinque a Arcibaldo (per consolarlo di non essere abbastanza veloce col suo calcolatore). Quanti biglietti da venti, da dieci e da cinque mi restano? Ciò implica che ci sia almeno un biglietto da dieci, uno da venti e uno da cinque, e quindi la soluzione corretta è la seconda, e dopo di aver consolato Arcibaldo restano 0 biglietti da venti, 2 da dieci, 9 da cinque.

Se torniamo alla vecchia fattoria, ricordiamo che avevamo la seguente equazione:

4 x Conigli + 2 x Oche = 50 (zampe)

In più sappiamo che ci sono 20 animali in tutto, cioè

Conigli + Oche = 20.

Adesso facciamo una manovra di aggiramento e prendiamo alle spalle il problema. Noi sappiamo che il MCD di due numeri N e M può sempre essere espresso come

MCD = A x M+ B x N,

dove A e B (uno dei quali è certamente negativo, perché N ed M sono entrambi eguali o maggiori del MCD) sono interi calcolabili senza troppa difficoltà.

Nel caso di N= 4 e M=2 il MCD è 2, e - usando il sistema imparato a suo tempo - è dato da:

4 x 1 – 2 x 1 = 2

Sarebbe bello in questa semplice equazione avere a destra 50, per avere qualcosa che assomigli alla nostra equazione di conigli e oche data più sopra. Semplice, 50 è 2 x 25, come si trova facendo la divisione.
Quindi, se moltiplichiamo tutta l'equazione per 25, troviamo

4 x 25 – 2 x 25 = 50

equazione naturalmente corretta che ci dà quella che potremo chiamare **soluzione base**: 25 conigli e (-25) oche.
Ora l'equazione è assai simile a quella da cui siamo partiti nella vecchia fattoria, e tutto andrebbe bene, se non fossimo restati con un numero negativo di (-25) oche. A rigore, 25 teste di coniglio positive più 25 teste di oca negative dovrebbe fare zero teste. In qualche modo dobbiamo riuscire ad avere delle oche positive, anche perché le oche negative nessuno le vuole.

La nostra equazione, però, continua a dare 50 (zampe) se noi aggiungiamo oche ricordando che intanto dobbiamo togliere conigli. Ma per lasciare il numero di zampe immutato, per ogni coniglio che togliamo dobbiamo aggiungere 2 oche. Quindi la nostra equazione resta invariata scrivendo:

4 x (25- C) + 2 x (-25+ 2C) = 50

Dove C sono i conigli che togliamo.
E quindi il numero dei conigli è dato da 25-C, quello di oche è dato da -25 + 2C, e la somma dei due numeri conigli + oche deve dare 20.

Cioè

25-C- 25 + 2C = 20, ovvero **“correzione del numero di conigli = numero totale di teste”.**
E questo ci dice che C = 20. Ricordiamo che C non è il numero di conigli, ma la correzione al numero di conigli.
Risultato, ci sono (25-20) = 5 Conigli, e (-25 + 40) = 15 Oche, che è la soluzione che avevamo trovato da tempo, ma l’abbiamo trovata ora con il metodo più sofisticato possibile. Il quale ci dice anche che in ogni equazione CON NUMERI INTERI

$xA+yB = N$

dove x e y sono i numeri che cerchiamo, N deve essere divisibile per il MCD di A e B.

In qualche modo questo l’avevamo già visto, notando che il numero di zampe deve essere un numero pari. Però ne segue, cosa che può sembrare stupefacente, che l’equazione è **sempre** solubile se A e B sono primi fra loro, perché il loro MCD è 1 e tutti i numeri interi sono divisibili per 1.

Una seconda osservazione è che noi abbiamo ragionato sulle zampe ed abbiamo trovato che per ogni coniglio che aggiungiamo o togliamo dobbiamo togliere o aggiungere due oche. Se il problema fosse dato in astratto,

$4x + 2 y = 50$

essendo x ed y numeri interi, dovremmo vedere che la correzione che ci porta al numero giusto y, chiamiamola Y, è legata alla correzione X, che ci porta al giusto numero x, dalla relazione
$Y = - (4/2) X$. In altre parole, se nell’equazione sostituiamo

$4(x-X)+2(y+2X)$ otteniamo $4x-4X+2y+4X$, che sarebbe ancora eguale a 50.

In astratto, uno potrebbe dunque dire che alle soluzione di $Ax+By = N$ possiamo aggiungere una qualsiasi tra le soluzioni di $Ax + By = 0$ senza perturbare l’equazione di partenza, chiamiamole X e Y. Cioè, sommando membro a membro

$$ax + by = c$$

e

$$aX+bY = 0$$

otteniamo

$$a(x+X)+b(y+Y) = c$$

Di queste soluzioni X e Y ce ne sono infinite e rispondono alla forma $Y = - (A/B)X$, e possiamo farle giocare in modo da soddisfare ad altre condizioni, come la $x+y=20$.
Però non è così semplice. Uno studioso di algebra sarebbe soddisfatto, ma noi no, perché vogliamo ancora dei numeri interi. Supponendo, per esempio, di voler risolvere

$$25 X + 10 Y = 0$$

la nostra soluzione sarebbe: $Y = -(25/10)X$. Ma non tutte le X vanno bene. Intanto per $X =1$ otteniamo $Y = 2.5$, che non è intero. Potremmo allora dire che X deve essere un multiplo del

denominatore 10, che non è altro che il coefficiente di Y. Funzionerebbe, ma perderemmo diverse soluzioni. Per esempio si vede subito che X =2 ci dà comunque una Y intera, pur non essendo un multiplo di 10. E allora?
Intanto possiamo semplificare – (A/B) "dividendo per il MCD", che vale 5, e nel nostro caso otteniamo Y = -(5/2)X. A questo punto si possono avere numeri interi solo se x è un multiplo di 2, cioè del coefficiente di Y (che è 10) diviso il MCD. A sua volta X = -(10/25)Y = -(2/5)Y, e Y ci dà valori interi di X solo se è un multiplo di 5, cioè del coefficiente di X diviso il MCD. Infine, notiamo che i segni di X e Y sono opposti.

Naturalmente il bello di questo metodo di soluzione è che una volta soddisfatta la condizione che tra conigli e oche ci siano 50 zampe, possiamo trovare le correzioni alla soluzione base, di 25 conigli e (-25) oche dato qualsiasi numero di teste. L'equazione chiave è quella che ci dice che la correzione al numero di conigli C è eguale al numero di teste. Se invece che 20 teste ne avessimo 21, dovremmo inserirla nella soluzione base, e troveremmo 4 conigli e 17 oche.

Non so se qualcuno è riuscito a seguirmi fino qui. Se qualcuno ci è riuscito, sappia che questo problema è il più semplice di un campo intero, e non banale, della teoria dei numeri, che porta il nome preoccupante di "analisi indeterminata" e fu introdotto da Diofanto, matematico greco di circa 1700 anni fa.

Va detto che circa mille anni dopo Diofanto, gli Arabi introdussero l'algebra. Questa dà un diverso modo per risolvere il problema. In effetti, a guardarlo bene, questo non è propriamente il problema di Diofanto, ma è già un problema preparato per l'algebra degli Arabi.
Il problema

$$ax + by = c$$

con a,b,c,x,y numeri interi sarebbe già sufficiente per Diofanto, un matematico così antico che ai suoi tempi non solo non si conosceva l'algebra, ma neanche si conoscevano ancora i numeri negativi, senza cui l'algebra non ci sarebbe. Per Diofanto, il problema di trovare i numeri di conigli ed oche accettabili dato il numero di zampe, indipendentemente dal numero di teste, è un problema completo e se ne può dare una soluzione elegante. Nella sua soluzione, che noi abbiamo seguito or ora, le teste, se avete notato, le facciamo arrivare dopo. Gli Arabi invece sarebbero andati giù pesanti ed avrebbero detto: "Le incognite sono il numero di conigli, chiamiamolo x, ed il numero di oche, chiamiamolo y. Ma:

$$x + y = 20, \text{ quindi } x = 20 - y$$

Sostituiamo x nell'equazione originale (avevamo da distribuire cinquanta zampe) , 4x + 2y = 50, e otteniamo 4(20-y) + 2y = 50. Riordiniamo le y e troviamo: 80-2y = 50, cioè, in forma standard, **2y – 30 = 0**.
Applichiamo la formula risolutiva e troviamo y (che è il numero di oche) = 15. Quello che volevamo.
Perché dovremmo preferire il macchinoso metodo di Diofanto per questo problema? Non c'è veramente un motivo. Se il problema ha una soluzione in numeri interi, l'algebra degli Arabi ce la dà. Il problema è che il sistema ci dà una soluzione anche se questa non esiste, senza suonare

campanelli d’allarme. Dobbiamo poi rifiutarla noi applicando il nostro buonsenso.

Sia per esempio:  numero di teste = 7, numero di zampe $23 = 4x + 2y$.
Abbiamo $x = 7 – y$. Sostituiamo nella seconda equazione ed otteniamo:

$23 = 4( 7 – y)+ 2y  = 28-2y$
In forma standard abbiamo    $2y -5 = 0$, da cui $y = 2.5$ e poi $x = 7 - 2.5 = 4.5$.
Che ci troviamo infine con mezzi conigli e mezze oche a quanto pare non ne importa niente a nessuno, e in fondo se conigli e oche possono essere defunti è una soluzione anche questa.

## XV. NOTA SULL'UTILITA' DI PROCEDERE A TENTATIVI CON UN'IPOTESI INIZIALE.

Quello di fare un tentativo, vedere che succede, correggere il risultato e usare il tentativo corretto come nuovo tentativo, per vedere di nuovo che cosa succede, e ripetere il processo fino a che non siamo soddisfatti, è un sistema usato in molti casi. Per completezza, diciamo che in latino ripetere si dice "iterare", e questo tipo di metodi si chiama "di iterazione" o "iterativo".

Vediamo come usare un metodo iterativo per l'estrazione delle radici quadrate.
Supponiamo di avere un numero, per esempio 23 e di voler estrarre la radice quadrata.

$$\sqrt{23}$$

Sappiamo che la radice quadrata di un numero è il numero che moltiplicato per se stesso riproduce il numero dato.

Dunque se dividiamo il numero per la sua radice quadrata otteniamo come risultato ancora la radice quadrata. Nessuna sorpresa: questa è la definizione della radice quadrata.

$$23/\sqrt{23} = \sqrt{23}$$

Se dividiamo il numero dato per un numero maggiore della radice quadrata, invece, il risultato sarà un numero minore della radice quadrata. Infatti moltiplicando due numeri entrambi più grandi della radice quadrata di 23 si ottiene un numero maggiore di 23. Allo stesso modo, se lo dividiamo per un numero minore della radice quadrata il risultato sarà maggiore della radice quadrata, perché moltiplicando due numeri minori della radice quadrata di 23 si ottiene un numero minore di 23.

Allora può venirci un'idea. Si prende 23 e lo si divide per un numero più piccolo di 23, per esempio 5.
23/5= 4.6.
La nostra radice quadrata starà dunque fra 4.6 e 5.
Se facciamo la media tra 4.6 e 5 , otteniamo (4.6+5)/2= 4.8 e, dato che la radice quadrata è fra i due, questo numero, 4.8, dovrebbe essere più vicino alla radice quadrata di 23 di quanto non lo fosse 5 e di quanto non lo sia 4.6.

Rifacciamo il gioco, usando la nuova approssimazione che abbiamo trovato: 23/4.8=4.7917;
La nostra radice quadrata sarà dunque tra 4,7917 e 4,8.
Si fa la media tra 4.7917 e 4.8 e si trova 4.79583.
Ora, la radice vera è appunto 4.79583.... In due passi e sei operazioni abbiamo trovato 5 cifre decimali. Come si fa a sapere quando dobbiamo fermarci? Se la radice quadrata non è esatta, in genere ci vien detto: andate fino a 2 o 3 o N cifre decimali. In questo caso noi procediamo con questi calcoli fino a che le N prime cifre decimali non cambiano più.

Ma supponiamo di non essere particolarmente brillanti e di esser partiti con un numero molto diverso dalla radice quadrata, per esempio 10.
Niente paura, il metodo funziona ancora.
Primo passo:

$$\frac{23}{10} = 2.3$$

Vediamo che evidentemente se 10 era molto più grande della radice quadrata, 2.3 sarà molto più piccolo.

$$\frac{10 + 2.3}{2} = 6.15$$

$$\frac{23}{6.15} = 3.7398$$

$$\frac{6.15 + 3.7398}{2} = 4.94492$$

$$\frac{23}{4.94492} = 4.65124$$

$$\frac{4.94492 + 4.65124}{2} = 4.7981$$

Abbiamo dovuto camminare di più perché siamo partiti da più lontano. Ma intanto abbiamo già recuperato due cifre decimali ed al prossimo passo ne potremmo aggiungere altre due. Se provate trovate 4.79584, con quattro cifre decimali esatte. Questo metodo, quando siamo vicini al risultato, ci dà due nuove cifre corrette per ogni passo.

Questo giochetto lo si può fare quasi a memoria, almeno per avere le prime due cifre corrette. Anche perché non siamo costretti, nei primi passi, ad usare esattamente i risultati che otteniamo: questi ci servono semplicemente per avere nuove, migliori approssimazioni, che possiamo prendere come nuovi punti di partenza. Però possiamo tranquillamente arrotondarli. E 4.8, che otteniamo al primo passo della nostra ricerca della $\sqrt{23}$, non è affatto una cattiva approssimazione. Differisce dalla vera radice di solo 0,004.

Notate che esistono anche simili mezzi per estrarre radici cubiche, quarte etc. Ma per trovarli occorre introdurre qualche nuova idea.

## XVI. NOTA SULLA MATEMATICA SPERIMENTALE.

Una piccola calcolatrice elettronica permette esercizi interessanti, come notato sopra. Molto di più si può fare con un calcolatore di maggiori dimensioni, su cui sia installato il programma BASIC. Il computer costa quel che costa, ma il basic, per esempio nella forma QBasic, lo si può avere gratuitamente su Internet. Per Mac si può trovare, pure gratuitamente, qualche opportuna versione di Chipmunk Basic, su cui però non si possono usare i programmi direttamente come li dò, anche se le modifiche necessarie sono abbastanza facili da comprendere.

Il lettore ansioso di imparare potrebbe farsi dei programmi sui seguenti temi:

Esercizi di calcolo rapido
Estrazione di radici quadrate approssimate.
La vecchia fattoria.
Treni che si corrono incontro.

Programma QBasic che propone esercizi di calcolo (addizioni e moltiplicazioni con due cifre).

***PROGRAMMA NUMERO 3 IN QBASIC: ESERCIZI DI CALCOLO RAPIDO***

```
CLS
RANDOMIZE TIMER
PRINT “Esercizi di calcolo rapido. Operazioni di due cifre.”
PRINT “Scegliere operazione: 1 = addizione, 2 = moltiplicazione”;
10 INPUT “Quale operazione?”, OPER
PRIMO = INT(100*RND+1)
SECONDO =INT(100*RND+1)
IF OPER =2 THEN GO TO 20
IF OPER = 1 THEN
PRINT  PRIMO;  “ + ” ; SECONDO; “?”
INPUT “Risposta? ”, RISP
IF RISP =PRIMO + SECONDO THEN
PRINT “Corretto”
ELSE
PRINT “La risposta corretta è  “; PRIMO+SECONDO
END IF
END IF
GO TO 10
20 PRINT  PRIMO; “ x ” ;SECONDO; “?”
INPUT “Risposta?”, RISP
IF RISP =PRIMO * SECONDO THEN
PRINT “Corretto”
ELSE
PRINT “La risposta corretta è “, PRIMO*SECONDO
END IF
GO TO 10
```

Questo esercizio continuerebbe all’infinito. Se ad un certo punto dovete andare a dormire suggerisco di premere contemporaneamente i tasti Ctrl e C, che arrestano il programma.

## XVII. I REGOLI DI NEPERO.

Fino all'arrivo dei calcolatori elettronici c'erano al massimo delle calcolatrici elettriche, che tuttavia, essendo il meglio che c'era in commercio, erano molto ambite dagli studenti di scienze.
C'erano i regoli calcolatori usati soprattutto dagli ingegneri.
E poi c'erano altri meccanismi più o meno semplici.

Qui parleremo dei "regoli di Nepero", che apparvero nel 1600 e non hanno niente a che vedere con il regolo calcolatore che vedremo più avanti.

I regoli, che in questa versione servono unicamente a fare delle moltiplicazioni, presi tutti insieme appaiono come nella figura qui sotto.

Questi sono i regoli tutti insieme, ma l’idea non è questa. Intanto i regoli devono essere ritagliati secondo le colonne, ed è bene avere diverse copie di ciascuna colonna.

Supponiamo di voler moltiplicare 37 per 8. Si prendono i regoli delle colonne “3” e “7” e si affiancano. Poi si va a vedere la riga “8” e si sommano i numeri come le linee oblique ci indicano.

Risultato, 2(4+5)6 cioè 296.

Mentre 6 x 37 = 1(8+4)2, cioè 222 (tenendo conto del riporto)

E se dovessimo fare 33 x 8 ?? Allora ci occorrerebbero due copie del regolo “3”.

Non c’è niente di misterioso nel funzionamento dei regoli. Essi rendono semplice il riporto, null’altro. Lo potete capire da soli e potete farvene facilmente un certo numero. Magari li potete anche perfezionare. Fotocopie, forbici, colla e cartoncino.

Se volete divertirvi un poco, provate a usare i regoli di Nepero per trovare il risultato dei prodotti di **12345679** (senza l’8, chissà perché) per 1,2,3..eccetera. Potete magari farlo per tutti i numeri fino a cento , facendo due prodotti e poi sommando come vi hanno insegnato a scuola.

Se ci fate un po’ d’occhio quasi ogni risultato del prodotto di 12345679 per un numero di una cifra ha qualche peculiarità o regolarità. Numeri particolarmente curiosi risultano moltiplicando questo numero per i multipli di 9. Ma non mancano sorprese neanche con altri numeri di due cifre.

Potete addirittura fare un gioco: scrivete il numero 12345679, che non è difficile da ricordare, poi chiedete ad un amico qual è il suo numero preferito. Mettiamo che dica 3. Moltiplicate 3 x 9 = 27. Poi ditegli: “Visto che ti piacciono i 3, moltiplica 27 per 12345679 e ne avrai quanti ne vuoi”.

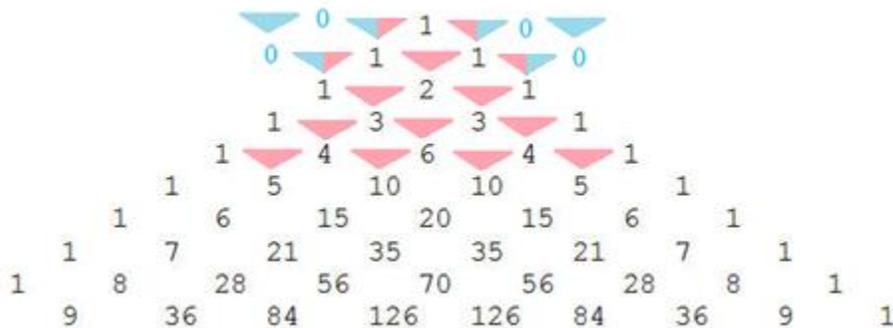
Altri risultati curiosi si trovano moltiplicando i multipli di 9 per 987654321.

E altri ancora moltiplicando i multipli di 7 per 15873.

| Prod.-zeiger | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 36 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 81 |

## XVIII. UN TRIANGOLO FAMOSO

Niccolò Tartaglia                Biagio Pascal

Vediamo ora una strana tabella che ci dà dei numeri curiosi.

Vedete come si forma questo triangolo. Si comincia con un 1 (quello ce lo dobbiamo proprio mettere noi) e poi sotto ogni numero si mette la somma di due numeri della riga superiore. E' chiaro che nella seconda riga ci sono solo due numeri.
E' come se seminando un 1 in un campo di zeri ottenessimo una superba pianta. Una pianta che ha almeno due nomi da due grandi matematici: gli Italiani lo chiamano triangolo di Tartaglia - non ridete, non si chiamava così, ma Niccolò Fontana era un povero ragazzino, che a dodici anni fu ferito da una sciabolata alla gola durante il sacco della sua città di Brescia e non riuscì mai più a parlare bene, per cui fu soprannominato Tartaglia. I Francesi lo chiamano triangolo di Pascal, dal nome di un altro matematico prodigio che scoprì questi numeri indipendentemente cento anni più tardi.

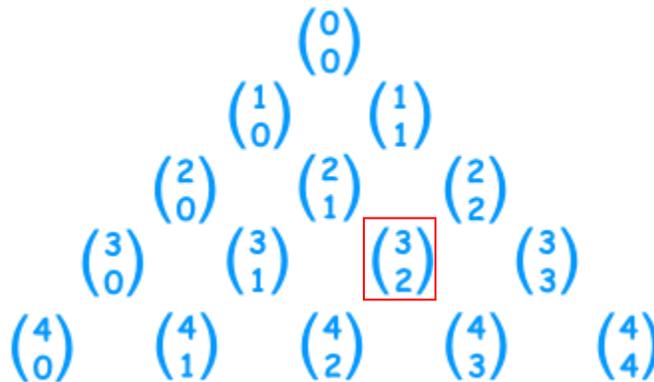
Già, ma che cosa vogliono dire questi numeri? Servono a qualcosa?

Questi numeri che escono quasi dal nulla hanno diverse applicazioni.

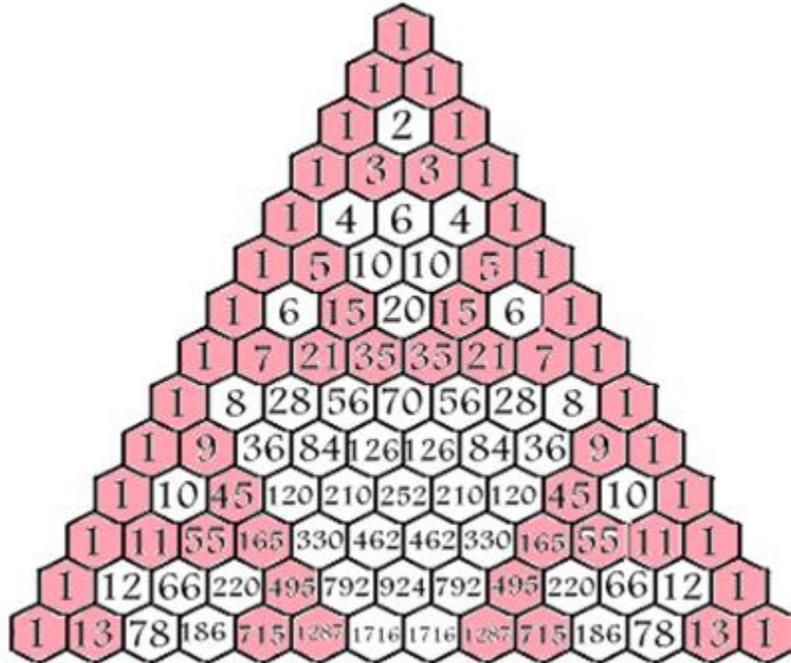
Supponiamo che siate cinque in una classe di scacchi, e vogliate formare un torneo in cui ogni giocatore incontra una volta ogni altro giocatore. Quante partite andranno giocate? Ci si arriva per tentativi, ma bisogna organizzarsi bene.
Si dice: gli scolari sono A, B, C, D, E.
le partite di A sono AB, AC, AD, AE (quattro)
Le partite di B sono BA, BC, BD, BE: sembrano 4, perché è chiaro che ogni giocatore dovrà giocare con gli altri quattro uno alla volta, ma facciamo attenzione, BA è lo stesso che AB. Quindi le partite nuove sono solo 3, cioè BC, BD e BE.
Le partite di C, facendo lo stesso ragionamento, sono 2, CD e CE, perché CA e CB sono già state notate come AC e BC rispettivamente.
Resta un'unica partita nuova, DE. Totale: 10 partite.

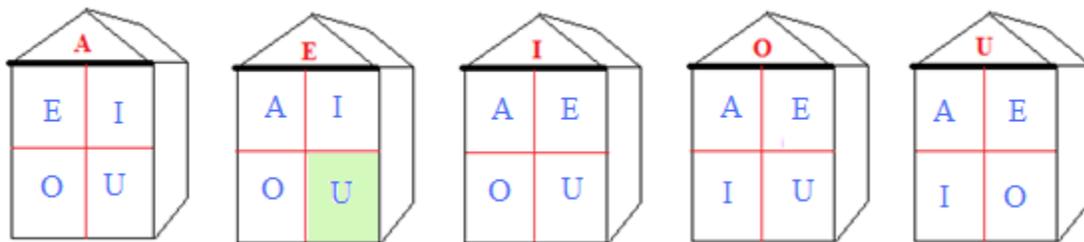
Il numero che si trova al terzo posto (non zero) nella fila che inizia con 1, 5, 10 è dieci. Dunque è facile trovare la fila, perché il secondo numero ci indica il numero totale di giocatori. ma per trovare la colonna bisogna ricordarsi di aggiungere 1 al numero di componenti della squadra. Oppure potete pensare che il primo numero, che è sempre 1, risponda alla domanda "quanti gruppi di zero giocatori si possono fare con cinque giocatori?. Risposta, solo uno, perché bisogna escluderli tutti. Il secondo numero risponde alla domanda: “quanti gruppi di 1 giocatore si possono fare con 5 giocatori?”. La risposta è evidente: 5. Poi abbiamo i gruppi di 2 giocatori, tre giocatori, quattro giocatori. E questi sono meno evidenti e sono il motivo per cui abbiamo costruito la tabella.
Se gli allievi sono 8, il numero di partite è 28 (terza colonna nella fila 1,8...). E questo già incomincia a essere lungo da calcolare.

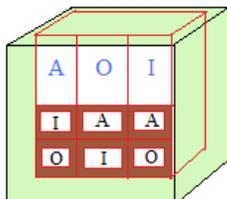
Le cose sarebbero assai più complicate se su otto membri di un club di rematori si volessero fare tutti i possibili equipaggi di un "quattro senza". Anche questo conto può essere fatto organizzandosi - ma ci vuole un po’ di tempo. Armati della nostra tavola andiamo a cercare il posto 5 nella fila 8, e troviamo 70. Pensate un po’! con otto rematori si possono fare 70 diversi equipaggi di quattro rematori. Chi l'avrebbe mai detto. Vedremo più avanti perché quello che ho detto è vero.
Tra l'altro, sarebbe anche interessante organizzare un modo razionale di elencare tutti i possibili equipaggi, il che non è banale.

Forse, se si vuole ricordare meglio il significato dei numeri, si può scrivere il “nome” dei vari numeri del triangolo:

Il simbolo nel rettangolo rosso ci dice quante sono le squadre di **due** diversi rematori presi da un gruppo di **tre** candidati.   Se si va a vedere il nostro triangolo, si vede che sono 3.
Non è irragionevole, perché  fare squadre di due diversi rematori da un gruppo di tre candidati, vuol dire lasciarne fuori uno diverso ogni volta. Siccome i candidati sono tre, possiamo fare questa operazione solo tre volte.  Esattamente come se facessimo squadre di un rematore. Infatti, ogni volta che facciamo una squadra diversa di due rematori, su tre, facciamo anche una squadra diversa di un rematore su tre. Questo può spiegare la più visibile delle simmetrie nel nostro triangolo.

Naturalmente, il bello della nostra tavola è che non occorre impararla a memoria. La si può costruire immediatamente, data una matita e un pezzo di carta. Si fa molto più in fretta a costruire la tavola a partire dal numero 1 fino alla fila numero 8 che a contare tutte le diverse combinazioni di otto rematori quattro per volta.   Qui vediamo il triangolo in forma piramidale, in cui ogni numero è la somma dei due sovrastanti.
Notate anche che i numeri dispari (in rosa) non sono disposti a caso nel nostro triangolo, ma riproducono una figura che magari incontreremo di nuovo.

In realtà potremmo vedere la situazione al contrario considerando la cosa dal punto di vista dei numeri pari. Allora con qualche esperimento troveremmo che non sono solo  i numeri pari e dispari che formano strani triangoli, ma anche i multipli di qualsiasi numero.

Naturalmente qualcuno si può chiedere se si possano calcolare direttamente i termini del triangolo di Tartaglia/Pascal senza doverlo costruire partendo da 1. Naturalmente tutto (o quasi) è possibile in matematica.

Il primo passo verso la soluzione è risolvere il seguente problema.
Date N (per esempio cinque) lettere <u>diverse</u> dell’alfabeto, quanti anagrammi di N lettere diverse si possono fare? Supponiamo di avere case con stanze, nelle stanze degli armadi, negli armadi dei cassetti, nei cassetti delle scatole.
Noi possiamo scegliere come prima lettera una qualunque delle cinque, per esempio A, E, I, O, U. Ne mettiamo una per casa e quindi occupiamo cinque case. Ogni casa avrà come nome questa prima lettera. In ogni casa possiamo mettere una qualunque delle **quattro lettere restanti**, una per stanza, e la stanza prenderà il nome di questa lettera. Avremo così quattro stanze per casa.

Nella casa A avremo, ad esempio, le stanze AE, AI, AO, AU. Ma nella casa E avremo le stanze EA, EI, EO, EU eccetera. Ad esempio, la stanza AE differisce dalla EA, essendo in due case diverse: “L’ordine importa”, infatti il problema è proprio quello di trovare in quanti modi diversi possiamo **ordinare** le cinque vocali. Occupiamo quindi quattro stanze per casa, in tutto 5 x 4 = 20 stanze occupate.

In ogni stanza possiamo mettere una qualunque delle **tre lettere restanti** ciascuna in un armadio, a cui darà il suo nome. In questo modo occupiamo 3 armadi per stanza, 4 x 3 per casa, 5 x 4 x 3=60 armadi in tutto. Ad esempio nella stanza EU avremo i tre armadi EU-A, EU-O, EU-I.
Ora prendiamo una qualunque delle due lettere restanti e le mettiamo ciascuno in un cassetto, occupando così 5 x 4 x 3 x 2 cassetti in tutto. Per esempio, nell'armadio EU-A avremo i cassetti EUA-I ed EUA-O.

Casa E, stanza U

Infine potremmo mettere la lettera restante in una scatola, ed avremmo 5 x 4 x 3 x 2 x1 scatole.
I nomi delle 120 scatole saranno i nostri anagrammi.
Quindi, se non ripetiamo le lettere, il

numero totale di anagrammi di N lettere è N x (N-1) x (N-2).. x 2 x 1.

Se non si tratta di lettere ma di oggetti qualunque, non parliamo di anagrammi, ma di permutazioni. Inoltre il prodotto N(N-1)(N-2)…2 x 1 ha un simbolo suo, che è N! e si legge "N fattoriale".
Se invece possiamo ripetere le lettere, gli anagrammi sono più numerosi. Ad esempio, se prendiamo cinque lettere e facciamo anagrammi di sei lettere in cui sono ammesse le ripetizioni, ciò vuol dire che al primo posto possiamo mettere una qualunque delle cinque lettere, al secondo pure, al terzo anche etc, sei volte, fino a che ne avremo $5\times5\times5\times5\times5\times5= 5^6 =15625$.

Supponiamo ora di avere sei scolari e voler vedere quali sono tutti i possibili gruppi di 3 scolari. Supponiamo di avere dei banchi a tre posti. Nel primo posto possiamo mettere uno qualunque dei sei, nel secondo uno qualunque dei cinque restanti, nel terzo posto uno qualunque dei quattro restanti. Totale: 6 x 5 x 4 = 120. Questo numero, se lo si vuol esprimere in modo compatto, si ottiene dividendo due fattoriali:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \left(\frac{6!}{3!}\right)$$

Ricordate però che questa divisione per fattoriali è solo una tecnica per scrivere n(n-1)(n-2).
Fin qui tutto bene. Ma sappiamo che il risultato dovrebbe essere nel nostro triangolo di TP.
Andiamo a vedere il nostro triangolo di TP e troviamo che il numero

$$\binom{6}{3} = 20$$

Dove abbiamo sbagliato?

Qui bisognerebbe chiudere il libro e pensare.

Allora forse troveremmo qualcosa che abbiamo già visto, cioè che la squadra Giorgio, Francesco, Giacomo è lo stesso che la squadra Francesco, Giacomo, Giorgio o altre ancora: sono sei in tutto. Tutte le permutazioni dei tre scolari, che come abbiamo visto sono 3!, contano come una sola. Quindi bisogna ancora dividere 120 per 3! che vale 6.

Il risultato è che

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

O, più in generale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$$

E' una buona ginnastica mentale cercare di interpretare questa formula. Incidentalmente, l'oggetto $\binom{n}{k}$ si chiama **coefficiente binomiale**. Il perché lo vedremo. Qualcuno che sta più attento dirà: "Se interpretiamo e calcoliamo in questo modo il coefficiente binomiale, e non direttamente dal triangolo di TP, questo vuol dire che 0! =1. Infatti

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!}$$

e noi già sappiamo dal triangolo di TP che questo vale 1.
Esatto, tenetelo presente.

**0! = 1**

Altra cosa che sappiamo da come abbiamo costruito il triangolo di TP è che, ad esempio

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

O, in generale:

$$\binom{N+1}{k+1} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k+1}$$

Cioè un coefficiente è dato dalla somma dei due che gli sono direttamente sopra nella riga superiore.

Svolgendo i fattoriali, lo si può dimostrare in altra maniera.

Le cose si complicano nei nostri anagrammi se non anagrammiamo cinque lettere diverse A E I O U, ma il nome LALLA. Noi ci aspetteremmo 5! soluzioni, cioè 120 anagrammi. Possibile?

In effetti gli anagrammi sono soltanto …dieci!

I dieci anagrammi di LALLA:

AALLL
ALALL
ALLAL
ALLLA
LAALL
LALAL
LALLA
LLAAL
LLALA
LLLAA

Perché? Perché nelle 5! permutazioni, 3 lettere L sono eguali e quindi le loro 6 permutazioni, contano come una sola,  e due lettere A, due permutazioni, contano come una sola. Quindi dobbiamo dividere 120 prima per sei e poi per due, che ci lascia 10.

Il triangolo di TP è una foresta di animali matematici. Quando non avete niente da fare, esploratelo, per esempio trovando il significato dei vari allineamenti di numeri, orizzontali (ma questo lo sappiamo), verticali e trasversali.

**XIX. UN PO' DI FORMALISMO, ma solo per coloro a cui piace (Parte I).**

Ad alcuni piace provare ad estendere le formule destinate a numeri fino ai limiti del possibile, magari anche ad oggetti che non sono numeri, per vedere che cosa ne vien fuori. Molte scoperte matematiche sono state fatte in questo modo. Se voi siete in questa categoria di esploratori, questo capitolo vi può interessare.

Incominciamo col calcolare $(a+b)^4$.
Questi non è altro che (a+b)(a+b)(a+b)(a+b), esattamente come $a^4$ non è altro che a·a·a·a. In pratica possiamo incominciare a fare $(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$, che poi moltiplichiamo per se stesso eccetera. Ma procediamo in un altro modo, usando la testa.

Il risultato di (a+b)(a+b)(a+b)a+b) sarà la somma di prodotti di potenze di a e b, ciascuna moltiplicata per un coefficiente, cioè un numero, che ci dice quante volte il prodotto si presenta. Ad esempio, $a^4$ si può presentare una volta sola, quando cioè in tutte le parentesi, dette "binomi", (a+b), noi scegliamo la *a*.
Invece il prodotto $a^3b$ si presenterà tutte le volte che sceglieremo *a* in tre parentesi e *b* in una. Ma questo lo possiamo fare 4 volte, cioè possiamo scegliere le parentesi 1,2,3 o le 1,2,4 o le 1,3,4, o le 2,3,4. (Questo ragionamento dovrebbe incominciare a ricordarci qualcosa).
In quanto al prodotto $a^2b^2$ lo troviamo tutte le volte che scegliamo *a* in due parentesi su quattro. E poi avremo $ab^3$ quando sceglieremo *b* in tre parentesi e *a* in una e infine $b^4$, quando avremo scelto *b* in tutte le 4 parentesi.
Il coefficiente di $a^2$ è quindi il numero di modi in cui noi possiamo formare squadre di due parentesi da un totale di 4 parentesi (o due giocatori da quattro giocatori). E queste sappiamo che sono

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

E quindi abbiamo:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}\,a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

con i coefficienti che costituiscono appunto la quarta riga del triangolo di Pascal. E da questo si capisce il perché del nome dei vari coefficienti: si chiamano coefficienti binomiali perché entrano nelle potenze del binomio.

Vedete come sono costruiti i coefficienti: *4* è l'esponente del nostro binomio, che per il momento è un numero intero. Nei "coefficienti binomiali" 4 è sempre al piano superiore. In quello inferiore ci stanno i numeri da zero a *4*, che sono in tutto *5*, dato che c'è anche lo zero. Ogni coefficiente binomiale moltiplica un prodotto di potenze dei due termini del binomio, in cui la somma degli esponenti è 4, e uno dei due varia da zero a 4, l'altro da 4 a zero.
Se invece di voler fare $(a+b)^4$ vogliamo $(a+b)^n$, applicando questo metodo senza far troppe domande troviamo un'espressione di n+1 termini, ciascuno costituito da un coefficiente binomiale in cui n sta al piano superiore, mentre al piano inferiore abbiamo i numeri da 0 a n.

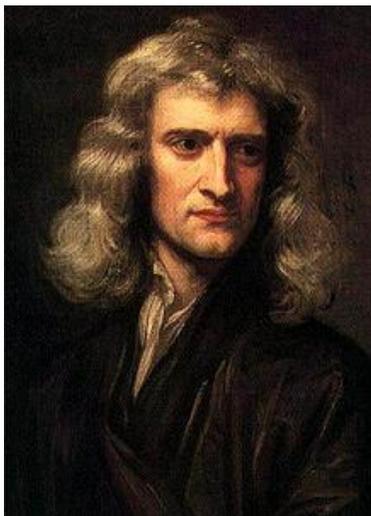
Ogni coefficiente moltiplica un prodotto di potenze di a e b, in cui la somma degli esponenti vale sempre n, e l'esponente di b varia da 0 a *n*, mentre quello di a varia da *n* a 0.
Possiamo quindi scrivere subito e con comodo calcolare potenze alquanto complicate come $(a+b)^{10} = a^{10} + 10\, a^9b+45\, a^8b^2$ eccetera, leggendo i coefficienti direttamente dalla decima riga del triangolo di T/P.

La formula per $(a + b)^4$ è talmente simmetrica che coloro i quali hanno un po' di disposizione per il formalismo non troveranno strana la sua estensione alla potenza n, che si scrive:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1}\ a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

Se poi a = 1, le cose vanno ancora meglio, perché una delle variabili – mettiamo che sia *a* - scompare, siccome tutte le potenze di 1 sono eguali ad 1. Avremmo quindi:

$$(1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2} b^2 + \binom{n}{3} b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

Fin qui tutto bene.

Isacco Newton

Ma un giorno, verso il 1665, Isaac Newton si disse:

- *E se mi occorresse un esponente n non intero?*
- *E per che diavolo? Gli chiese un amico.*
- *Non so, disse Newton, metti che mi occorra* $\sqrt{(1+x)}$, *che potrei scrivere come* $(1+x)^{1/2}$. *Difatti* $(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} = (1+x)$.
- *Bene, rispose l'amico che era un impaziente, allora ti attacchi al tram.*
- *I tram non ci sono ancora. E poi, col fischio, che mi attacco, rispose Isacco.*

- *Ma la vuoi capire, gli disse l'amico, che i coefficienti binomiali valgono solo per numeri n interi?*
- *Allora estendiamo il concetto, rispose Isacco.*

*L'amico era un impaziente e gli disse:*

- *Estendi, estendi, poi vieni a riferire.*

*Ma Newton era un genio, e di lì a poco era già di ritorno. Disse:*

- *Hai notato il caso che abbiamo visto l'altro giorno?*

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!}$$

- *Tutti lo sanno, disse l'amico.*
- *Ma hai notato che il primo rapporto*

$$\frac{6!}{3!}$$

*è solo un espediente per scrivere 6 x 5 x 4, cioè 6×(6-1)×(6-2)? Vai a vedere se non ci credi.*

*L'amico andò a vedere e disse: Già.*

- *E quindi, disse Isacco, se n non è un numero intero come 6, ma, per esempio, ½, noi possiamo scrivere:*

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}$$

- *E come sappiamo che ci dobbiamo fermare ad (1/2-2)? chiese l'amico che non capiva dove ci si sarebbe potuti fermare.*
- *Mah, non so, disse Isacco. Dopo tutto, questo coefficiente moltiplica una potenza di x con esponente intero. Se abbiamo la prima potenza di x ci fermiamo al primo termine, se abbiamo la seconda potenza ci fermiamo al secondo (e poi nota che per ricordarcelo di sotto abbiamo 2!) E via di seguito.*
- *Già, disse l'amico. Ma con n intero avevamo un bel polinomio di grado n. E con n non intero? Non vedi che non avremo mai un termine come* $\binom{n}{n}$ *per chiudere il polinomio?*
- *E chi ha detto che dobbiamo chiudere il polinomio? Noi continuiamo fino all'infinito. Non avrai mica paura dell'infinito? Semplicemente, prima avevamo*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

*che finiva da qualche parte quando n-k diventava zero. Adesso invece abbiamo:*

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

*e non facciamo l'ultimo passo, perché se r non è intero, noi non sappiamo che significhi r!. O pensi che dovremmo estendere il concetto di n! a numeri non interi? Ho idea che si possa fare, ma non ci occorre. E' un poco un ritorno alle origini.*

- *Secondo me è una scemenza, disse l'amico.*
- *Il cuore mi dice che funziona, rispose Isacco. Ho deciso di chiamare SERIE questi polinomi che vanno all'infinito.*
- *Ma se vanno all'infinito avranno un valore infinito, pigolò l'amico. Per esempio* $x^{100}$ *deve avere un valore enorme.*
- *Ma sei proprio un asino, gli disse affettuosamente Isacco. E' vero che se un numero è maggiore di 1, anche di poco, le sue potenze successive daranno dei numeri crescenti, fino all'infinito. Ma se il numero è minore di 1, anche di poco,le sue potenze successive saranno sempre più piccole, e andranno verso zero. Pensa a 0.5, al quadrato è 0.25, al quadrato è 0.0625.Tanto per dire,* $0.5^{100}$ *sarà praticamente zero. Vedi quel che dico?*
- *Senti, gli disse l'amico, la tua mamma vorrebbe che tu ti dedicassi all'agricoltura. Perché non ci fai un pensierino?*

Non si conosce la risposta di Isacco, se non dal fatto che l'amico andò in giro per qualche giorno con un occhio nero. Ma aveva ragione Isacco.

E quindi:

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Cioè, per r=1/2:

$(1 + x)^{1/2} = 1 + ½ x – 1/8 x^2$ …..

Ma da dove viene quel " -1/8"?. Naturalmente il trucco è quello. Se riuscite da soli avete capito, altrimenti no.

Ad ogni modo, per r =1/2

$$\frac{r(r-1)}{2!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$$

E il termine successivo?

E il banale $(1-x)^{-1}$, a che cosa sarà eguale?
Applicare la formula senza paura:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-1-1)}{2}(-x)^2 + \left(\frac{(-1)(-1-1)(-1-1-1)}{6}\right)(-x)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

Modo complicato di ottenere una serie semplice, che ritroveremo in futuro.

Qui qualcuno vorrà lanciare la spugna. Lo può fare benissimo. Quello che sto scrivendo ora non è essenziale per il seguito.
Ma come? C'è un seguito? Non è ancora finita?

(Continua)

NOTA 1: Perché dovrebbe essere utile calcolare $(1+x)^{1/2}$ o $(1-x)^{1/2}$, la cui serie differisce dalla precedente solo perché qualche termine ha segno meno?
Per esempio il problema di calcolare $\sqrt{23}$ ricade in questo caso. Possiamo scrivere 23 = 25-2 = 25(1-2/25).
Quindi $\sqrt{23} = \sqrt{25}\,(1-0.08)^{1/2} = 5(1-0.04...) = 5 - 0.2.... = 4.8$. Potete provare a calcolare il prossimo termine. Tenendone conto si ottiene $\sqrt{23} = 4.796$. Il risultato, come sappiamo, è 4.79583.

NOTA 2: E' inutile dire che a suo tempo arrivò anche chi estese il concetto di n! a numeri n non interi. Era il solito Eulero.

## XX. INDOVINARE LE SUCCESSIONI

Impariamo ora un trucco che vale in molti casi, quando ci si dice per esempio:
*"dati numeri 1,2,3,4,... qual è il numero da mettere al quinto posto"*.
Be', chiunque dirà 5.
Quasi istintivamente, abbiamo notato che la differenza tra due numeri consecutivi è sempre 1.
Aggiungiamo 1 a 4 e troviamo 5. Molti lo fanno praticamente senza pensarci.

Adesso propongo un'altra successione:
1, 3, 5, 7 ?
qui vediamo che la differenza è sempre 2, e quindi il prossimo numero è 7+2, cioè 9.

Proviamo un caso più difficile.

Successione: 1 4 9 16 25 36 ?

Ora, se non sappiamo che cosa significano i numeri della successione possiamo almeno indovinare la prossima differenza, che è il prossimo numero dispari, cioè 13.
Infatti:

Successione: 1 4 9 16 25 36 ?
Differenze: 3 5 7 9 11

Il prossimo numero dopo il 36 sarà ottenuto sommando la prossima differenza, cioè 13, a 36, con risultato 49.

Infatti gli elementi della successione non sono altro che i quadrati consecutivi dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc.
Al 13 ci siamo arrivati istintivamente notando le differenze delle differenze, dette anche differenze seconde:

1 4 9 16 25 36
3 5 7 9 11
2 2 2 2

La prossima differenza prima è quindi 11+2=13, ed il prossimo termine della successione è 36+13=49.

Adesso sommiamo le varie righe del nostro triangolo di Pascal o di Tartaglia, che possiamo costruirci da soli, ed è:

1

1 + 1

1 + 2 + 1

1+  3 + 3 + 1

1 + 4 + 6 +4+ 1

1 + 5+ 10+ 10+ 5 + 1

1 + 6 + 15+ 20+ 15+ 6 + 1

…….

Facendo le somme troviamo:

1,  2, 4, 8, 16, 32, 64 …

Che succede se facciamo le differenze prime?

 1    2    4    8    16     32     64<br>
    1    2    4    8     16     32

Le differenze prime presentano esattamente la stessa successione. Ci permettono però ancora di ottenere il prossimo termine, perché vediamo che la prossima differenza deve essere 64, quindi il prossimo termine è la somma del termine ultimo (64) più la differenza trovata (64). Totale, 128. Ma che significano questi numeri?

## XXI. SOMMA DI UNA SUCCESSIONE

Oltre a trovare il prossimo termine della successione, una domanda interessante è "qual è la somma di una successione?". Questo era il problema di Gauss bambino che doveva sommare

1 2 3 4 5 6 fino a 100.

Abbiamo detto che sommare da uno a 100 o da 100 a uno è lo stesso lavoro. Allora?
Il principe (forse allora solo principino) vide che sommando 1+99 faceva 100, e anche 2+98 faceva 100 e anche 3+97..... fino a 49+51. Cioè 49 volte 100 = 4900. Poi restava 50 in mezzo e 100 alla fine: totale 4900+50+100 = 5050.
Il maestro Bultmann comprese che quel giorno la sua carriera di insegnante aveva raggiunto il culmine, e cercò per quanto poteva di aiutare Gauss bambino - tanto più geniale di lui - a esprimere al meglio il suo talento matematico.

Per quanto chiaramente questa soluzione venga dritta dritta dal LIBRO, non è quella usata normalmente, perché dipende troppo dal fatto che la somma era da 1 a 100, e non, per esempio, da 1 a 138. Il piccolo Gauss, se non sapeva ancora fare le moltiplicazioni per numeri diversi da 10,100, 1000, difficilmente ci sarebbe arrivato allora – certo non in un istante.

Si scrivono piuttosto le due successioni una in avanti ed una all'indietro, una sopra all'altra:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | …. | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 99 | 98 | 97 | 96 | 95 | …. | 1 |

Sommando in colonna troviamo 100 volte la somma 101, il che fa 10100.
Ma che è successo? Non doveva essere 5050? Il fatto è che abbiamo sommato **due volte** la successione, in avanti ed all'indietro, quindi dobbiamo dividere 10100 per 2, il che ci dà ancora 5050.

Se al posto di 100 scrivete un qualunque numero N,

| 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | N |
|---|---|---|---|---|---|
| N | N-1 | N-2 | N-3 | . . . | 1 |

vedete che 1 si somma a N, dando N+1, 2 si somma a N-1, dando ancora N+1, eccetera. Il che vuol dire che abbiamo N volte N+1, e poi dobbiamo dividere per due.

Quindi:

$$\textbf{Somma di numeri consecutivi da 1 a N} = \frac{N(N+1)}{2}$$

mettete qualsiasi numero, simulate in Qbasic (fate fare la somma per disteso, mentre voi a memoria o con la calcolatrice usate la formula). N può essere 867988, ma il risultato è Somma= 867988 x 867989/2.

Qualcuno può dire: “Ma dividendo per due non troviamo mai un numero non intero (il che dovrebbe essere impossibile, visto che sommiamo solo numeri interi)?”.
Potenza della matematica! Non troviamo mai uno 0.5 alla fine perché N e N+1 sono due numeri consecutivi, e quindi o l'uno o l'altro è divisibile per 2.

Io suggerirei di sperimentare con altre successioni:

- somma da 200 a 300
- somma di 1 3 5 7 9 11
- oppure 1 6 11 16

Quello che conta è che le differenze tra un termine e l'altro siano costanti. Naturalmente le formule saranno diverse. Ma se le trovate siete bravi.

Visto che ci siamo, vediamo un altro ingegnoso trucco, che risolve un problema indicato più sopra.

Stavolta vogliano sommare

1 2 4 8 16 32 64 128

cioè le potenze di 2, da $2^0$ (che sappiamo che vale 1) fino a $2^{64}$. Perché? mah, magari serve.

Supponiamo di moltiplicare ogni termine della successione per 2, ed otteniamo:

2 4 8 16 32 64 128 ... $2^{65}$

ora scriviamo la successione di partenza

1 2 4 8 16 32 64

sotto a quella che abbiamo trovato raddoppiandola. Ma scaliamo di un posto in modo da mettere in colonna numeri eguali.

Dunque, se scriviamo cosi:

|   | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 … | $2^{64}$ | $2^{65}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 … | $2^{64}$ | |

ci può venire in mente qualcosa. Che cosa? Di nuovo sommare? Un insegnante tradizionalista risponderebbe che non è sempre domenica. No, stavolta facciamo la differenza e troviamo che di sopra ci resta solo $2^{65}$ e di sotto 1, quindi la differenza delle due successioni è $2^{65}$-1.
Ma questa non è altro che la differenza tra il doppio della somma voluta (chiamiamola S) meno la somma voluta. Quindi

2 S - S (**= S**) = $2^{65}$-1

Vedete però che se avessimo voluto sommare per esempio 1+3+9+27+81+243, cioè $1+3+3^2+3^3+3^4+3^5$ per riottenere gli stessi termini della serie avremmo dovuto moltiplicare per 3 la serie, per poi sottrarle la serie di partenza:

$3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6$ (e questa è eguale a 3S)
$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5$ (e questa è eguale a S)

Avremmo:
$3S-S=3^6-1$
In altre parole avremmo:

$$1 + 3 + 3^2 + \ 3^3 + 3^4 + \ \ +3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$$

Non ho scritto 2 al denominatore per indicare come si generalizza la serie. Il trucco è sempre lo stesso: si moltiplica la serie $1+ k + k^2+k^3+-..k^n$ per k in modo da riottenere tutti i termini della serie tranne il primo e con un termine in più alla fine.

La formula generale è quindi

$$1 + k + k^2 + k^3 \dots . +k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Va detto che nel caso di 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. anche fare la somma (senza moltiplicare per 2) va bene.
Troveremmo

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | $2^{64}$ |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | $2^{64}$ |

Notate che se sommiamo 1+1 otteniamo 2, cioè il termine seguente; se sommiamo 2+2 troviamo 4, il termine seguente. Fino all'ultimo: 2 x $2^{64}$= $2^{65}$. Cioè:

2 4 8 16 32 65 128 $2^{65}$

Avremmo cioè

$2S = S + 2^{65}$-1

(difatti l'uno che c'era di sopra non c'è più).
Togliendo S da ambo i lati:
S= $2^{65}$-1.
Però per sommare 1 3 9 27 81 dovremmo complicarci la vita. Si può tuttavia trovare una formula generale anche basata sulla somma. La matematica non tradisce i suoi fedeli.

Sessantaquattro sono le caselle della scacchiera. E ricorderete certo che, secondo la leggenda, il bramino che inventò il gioco degli scacchi, chiese come ricompensa soltanto un chicco di riso sulla prima casella, 2 nella seconda, 4 nella terza etc. sempre raddoppiando. Naturalmente non c'è abbastanza riso sulla terra per soddisfare l'esoso bramino. Il numero di chicchi totale, come abbiamo appena calcolato, è $2^{65}$-1.

Ma notate bene che c'è quel "-1" alla fine. Un calcolatore elettronico vi può dare $2^{65}$, un numero con 19 cifre, e vedete subito che ai fini della ricompensa per il bramino quell'uno finale conta poco. Bene, per il matematico conta. Non si sa mai. E lo scolaro che ritiene che quell'uno finale abbia la sua importanza fa parte anche lui di quel gruppo eletto in cui c'è il Principe, e ci sono tutti gli altri grandi, che per un momento gli sorridono.

Vedremo più avanti un modo (approssimato) di calcolare $2^{50}$.

Vorrei osservare che non sempre il metodo funziona. Per esempio, quali sono i prossimi termini dopo:

5, 2, 9, 8, 4, 6, 7, …

Non è facile trovare come si possono aggiungere i termini successivi, anche se si sa quali sono.
5, 2, 9, 8, 4, 6, 7, 3, 1, 0. E ci fermiamo qui.

## XXII. UN PO' DI FORMALISMO, ma solo per coloro a cui piace (Parte II).

*Dopo qualche tempo l'amico rivide Newton, che era tutto eccitato.*

- *E allora, gli chiese, come va con le tue serie?*
- *Benone, rispose Isacco. Ho anche imparato a sommarle, sottrarle (che è facile), moltiplicarle, dividerle (che non è facile) … Adesso ti faccio vedere.*
- *Per piacere no, disse l'amico.*

*Newton fu un po' deluso, ma disse:*

- *Ho anche provato a fare serie non di numeri.*
- *Sei pazzo? Gli chiese l'amico.*
- *Per niente. Guarda un poco questa successione*

0 1 5 14 30 …

- *Molto bella, disse l'amico.*
- *Una successione di numeri come questa ( e come tutte le altre che abbiamo visto) potremmo chiamarla FUNZIONE, che genericamente indicherò con f(n).*
- *Non credo che funzioni, disse l'amico.*
- *Funzione è un nome come un altro. Quello che importa è che quando io ti dico un numero **n** qualunque, la f(**n**) è una macchina che ti sputa fuori un numero con una legge ben definita. Nel nostro caso:*

| n | f(n) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 5 |
| 3 | 14 |
| 4 | 30 |

- *Va bene, disse l'amico, ma noi non sappiamo la legge, come la chiami tu, per calcolare questa f(n).*
- *Secondo me una tabella va benissimo. Basta che esista da qualche parte. Ma col mio metodo troveremo anche la legge per calcolare questa f(n).*
- *E come?*
- *Guarda, disse Newton. Introduciamo un nuovo oggetto, che io chiamerei operatore E (ma potremmo chiamarlo in qualsiasi altro modo) il quale fa passare da f(n) a f(n+1). Cioè, per esempio,*

$$Ef(0) = f(1) = 1\ ,$$
$$Ef(1) = f(2) = 5,$$
$$Ef(2) = f(3) = 14.$$

- *Utile, osservò sarcasticamente l'amico.*
- *Più di quanto tu non creda, gli disse Isacco piccato. Per esempio possiamo scrivere $f(3) = Ef(2) = E(Ef(1)) = E(E(Ef(0)))$ cioè $f(3) = E^3 f(0)$. Hai capito dove voglio arrivare?*
- *No, rispose onestamente l'amico.*

- *Intanto abbiamo lo splendido risultato che $f(n) = E^n f(0)$. Ma hai visto come facciamo a calcolare f(n+1) che è eguale a Ef(n)? dobbiamo soltanto ricordare che*
-

$$f(n+1) = f(n) + [f(n+1)-f(n)].$$

- *Ma che bella scoperta! Esclamò l'amico sempre più sarcastico.*
- *Ma scusa, disse Isacco, calcoliamo le differenze successive.*

0 1 5 14 30 55 …
1 4 9 16 25 …
3 5 7 9…
2 2 2
0 0

- *Ma guarda! Strillò l'amico eccitato. Abbiamo già capito che i numeri della successione sono le somme dei quadrati successivi dei numeri interi positivi.*
- *Bravo, ma non è qui che volevo arrivare. Nota che le differenze della seconda riga (le possiamo chiamare differenze prime e indicarle col simbolo Δ) sono date dalla formula $\Delta f(0) = f(1) - f(0) = 1$; $\Delta f(1) = f(2) - f(1)= 4$ eccetera. D'accordo?*
- *Fin qui va bene, disse l'amico.*
- *Ma se accetti questo, accetti anche che* ***E = 1+ Δ.***
- *Ma su cosa opera E? Su cosa opera Δ?*
- *Ma non importa! Gridò Newton. Questo è il bello del formalismo. Possiamo fare calcoli su E e su Δ proprio come se fossero numeri (o quasi). Mi hai detto che non c'è niente di speciale a dire che*

  $$f(n+1) = f(n) + [f(n+1 ) - f(n)].$$

  *Ma questo possiamo scriverlo come $Ef(n) = f(n) + \Delta f(n)$, che è proprio $E f(n)= [1+\Delta]f(n)$. Poi semplifichiamo f(n)….*
- *Non credo mica che si possa fare, disse l'amico.*
- *Se funziona lo possiamo fare, rispose Isacco.*
- *Va bene, continua, disse l'amico esausto.*
- *Le differenze della terza riga, mi permetterai, spero, di chiamarle $\Delta^2$.*
- *Non vedo perché.*
- *Ma se guardi, il 3 che è al primo posto della terza riga è dato dalla differenza tra 4 e 1, cioè [f(2)-(f(1)] – [f(1)-f(0)], cioè f(2)-2f(1)+f(0), cioè $(E^2 – 2E +1)f(0)$. Ma $(E^2 – 2E +1)$ non è altro che $(E-1)^2$, cioè $\Delta^2$. ... Ehi! Che ti prende?*

*A questo punto l'amico era svenuto e Newton continuò da solo.*

- *Eppure è così semplice!*

$$f(n) = E^n f(0) = (1+\Delta)^n f(0)$$

*E non abbiamo altro da fare che applicare la formula generale per la potenza del binomio.*

$$f(n) = E^n f(0)= (1+\Delta)^n f(0) = \left[1+\Delta+\binom{n}{2}\Delta^2+\binom{n}{3}\Delta^3+\cdots\binom{n}{n}\Delta^n\right]f(0)$$

*col risultato che tutte le differenze operano su f(0) e quindi sono solo le prime di ogni fila, cioè $\Delta f(0)= 1$, $\Delta^2 f(0) =3$, $\Delta^3 f(0)=2$. E come se non bastasse, nel nostro caso tutte le differenze al di là della differenza terza sono zero. Quindi f(n), che è la somma dei quadrati dei numeri naturali da 0 a n è semplicemente:*

$$f(n) = f(0) + n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

*A questo punto devi ricordare che f(0) =0, e devi metterti al lavoro per "mettere in bella" i termini rimanenti. Ma i risultati ti vengono giusti anche con la formula"grezza" qui sopra.*
*Otterrai la formula generale per la somma dei quadrati dei numeri naturali da 1 a n, che è (con qualche trucco - eh sì, ci vuole un po' d'occhio):*

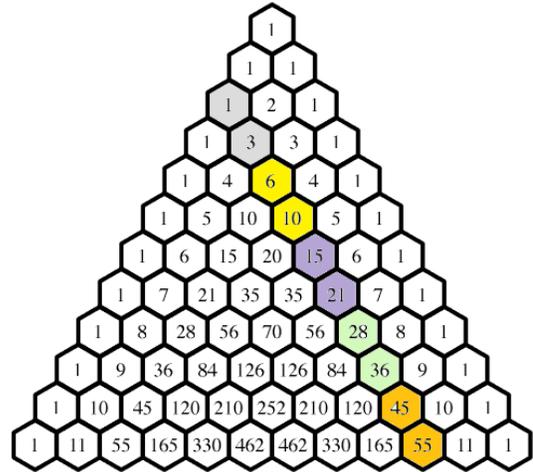
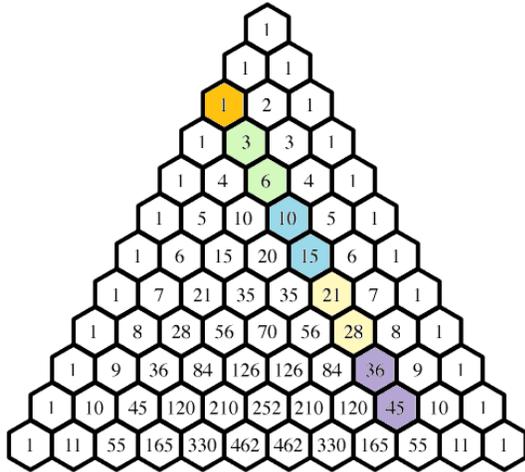
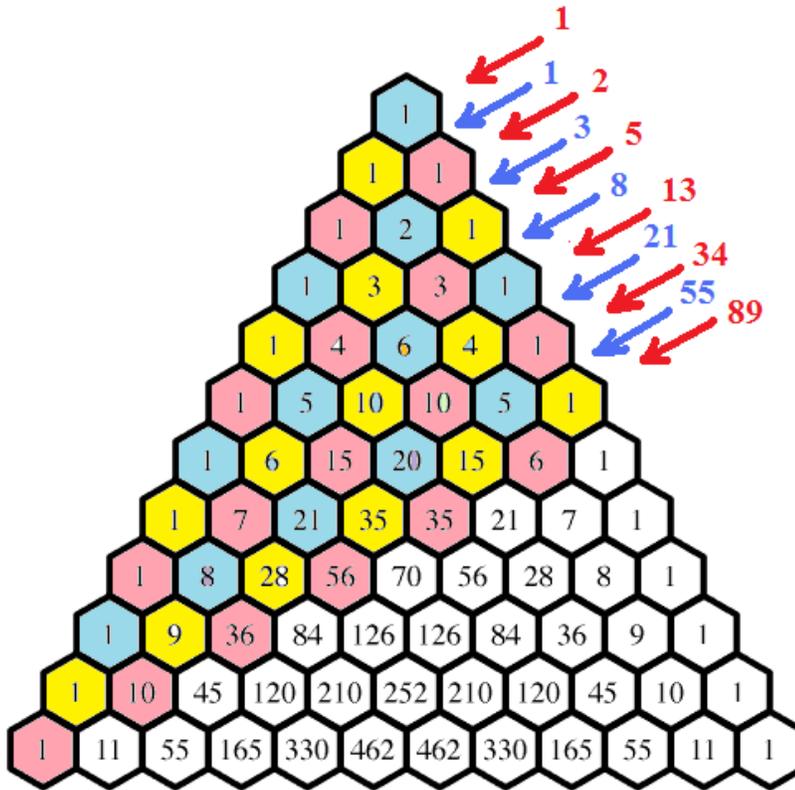
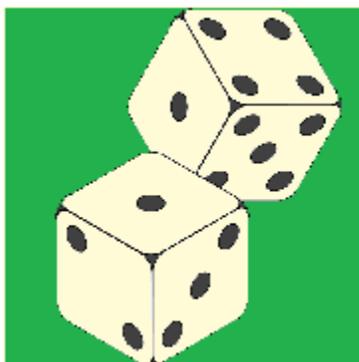
$$f(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

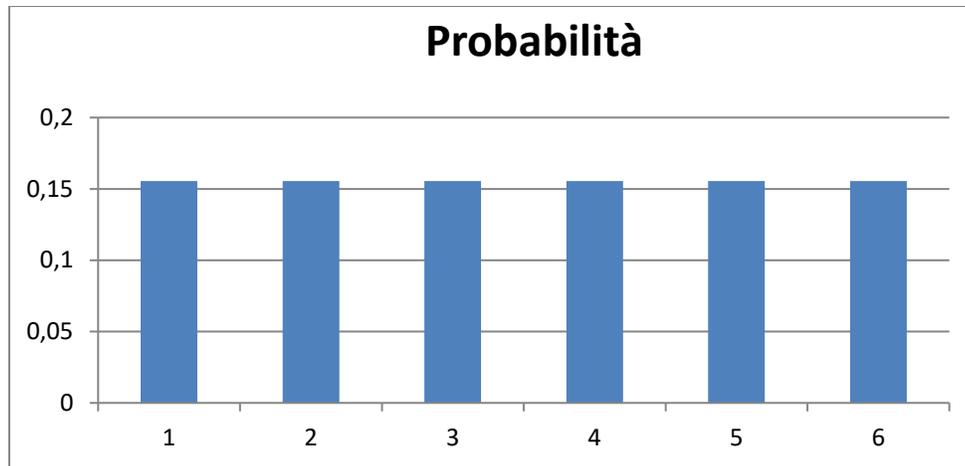
*Qui l'amico di Isacco aprì un occhio, e disse:"Ma questo lo sapevano anche i Greci!". Isacco, che era un po' permaloso, gli diede un pugno e l'altro si riaddormentò.*

Io però suggerisco di

- verificare la formula che abbiamo trovato per valori di n maggiori di 5;
- provare a ricavare la formula che già conosciamo per la somma dei numeri da 1 a n (basteranno le differenze prime);
- o addirittura la somma dei cubi dei numeri da 1 a n (ci vorranno anche le differenze terze);
- eccetera

Notate poi che abbiamo una "foresta di animali matematici", il nostro vecchio triangolo di TP. Con le formula date sopra potete trovare varie famiglie di successioni interessanti di numeri e proprietà.

- La somma dei numeri della riga N è $2^N$ (facile da dimostrare).
- Se (e solo se) il secondo elemento di una riga è un numero primo *p*, tutti i numeri della riga sono divisibili per *p*.
- I quadrati si trovano dalla terza obliqua in modo curioso, sommando le coppie di numeri dello stesso colore. Se ci pensate bene, è un modo notevole di dare i quadrati tanto dei numeri pari quanto di quelli dispari servendosi degli stessi numeri come "mattoni".
- Se si fanno le somme dei numeri dello stesso colore, come indicato dalle freccette nell'ultima figura, si ottiene la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 etc., in cui ogni numero è dato dalla somma dei due precedenti. Si parte con 1, poi 1+0=1, poi 1+1 =2, 2+1=3 e via. Questa è la famosa "Serie di Fibonacci" (più che una serie, che è una somma, sarebbe una successione ) ed ha un suo interesse specifico.

Quadrati (dei numeri dispari a sinistra, dei numeri pari a destra): somma delle coppie dello stesso colore.

## XXIII. DADI E MONETINE

Supponiamo di avere un dado, onestissimo, con sei facce su cui sono segnati i numeri 1,2,3,4,5,6.
Un amico vi invita a scommettere su qual numero uscirà lanciando il dado.
Giocare non è mai bene. Per cui direi, non scommettete mai, soprattutto se qualcun altro ve lo propone. Se proprio volete tentare la fortuna, non scommettete se non sapete quali sono le probabilità di vincere e quelle di perdere. Se qualcuno vi propone di scommettere è perché lui sa qualcosa più di voi. Oppure si annoia. (Per esempio, sapete quanto vale la somma dei numeri che compaiono sulle due facce opposte di un dado? E' sempre sette, e se non lo sapete è meglio che non scommettiate sui dadi).
Ma nel caso di un dato con sei facce è chiaro che avete una probabilità su sei di centrare il risultato. Perché 1/6? Perché la definizione di probabilità ci dice che questa è il rapporto del numero di casi favorevoli (1) diviso per il numero di casi possibili (6). E tutti i numeri hanno la stessa probabilità.

Se facciamo un diagramma, vediamo che le probabilità sono così distribuite:

Se fate la somma delle probabilità sui numeri possibili trovate che 1/6 (per l'uscita 1) + 1/6 (per l'uscita 2) +… fino all'uscita 6, il totale è

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=6\times\left(\frac{1}{6}\right)=1$$

Il numero 1 in teoria delle probabilità vuol dire "certezza". In altre parole, se lanciamo un dado e un gabbiano non se lo mangia al volo, uscirà certamente o un 1, o un 2, o un 3, o un 4 o un 5 o un 6.

Per veder quel che succede in realtà, possiamo prendere dado e lanciarlo quante volte vogliamo e tenere conto delle uscite. Se volete fare più in fretta potete fare una bella simulazione in QBASIC, usando la funzione RND. Notate comunque che su Internet potete trovare simulazioni sia in Italiano che in inglese ("Dice Roll Simulation"). Potete simulare 600 lanci e vedrete che alla fine i numeri realmente usciti si dispongono in una distribuzione non diversa da quella delle probabilità. Per costruire la tavola delle frequenze dividiamo il numero di 1 usciti per il numero di tentativi, poi il numero di 2 usciti per il numero di tentativi etc.

Dunque la tabella delle probabilità è costruita sulla base di una teoria (che il dado sia onesto) e la tabella delle frequenze è costruita sulla base dei risultati di un esperimento, e difficilmente è la stessa per i diversi esperimenti.

Vediamo un programma che simuli i lanci del dado.

***PROGRAMMA NUMERO 4 IN QBASIC: SIMULAZIONE DI LANCIO DI DADI***

```
CLS
NUM1=0.0
NUM2=0.0
NUM3=0.0
NUM4=0.0
NUM5=0.0
NUM6=0.0
RANDOMIZE TIMER
INPUT "Numero di lanci? ", LANCI
```

```
FOR I = 1 TO LANCI
USCITO = INT(6*RND+1)
IF USCITO = 1 THEN NUM1 =NUM1+1
IF USCITO = 2 THEN NUM2 =NUM2+1
IF USCITO = 3 THEN NUM3 =NUM3+1
IF USCITO = 4 THEN NUM4 =NUM4+1
IF USCITO = 5 THEN NUM5 =NUM5+1
IF USCITO = 6 THEN NUM6 =NUM6+1
NEXT I
PRINT "Numero lanci: "; LANCI
PRINT "Uno:  totale "; NUM1, "Rapporto: "; 6*NUM1/LANCI, "Differenza:  "; NUM1-LANCI/6
PRINT "Due:  totale "; NUM2, "Rapporto: ";6*NUM2/LANCI, "Differenza:  "; NUM2-LANCI/6
PRINT "Tre:  totale "; NUM3, "Rapporto: "; 6*NUM3/LANCI, "Differenza:  "; NUM3-LANCI/6
PRINT "Quattro:  totale "; NUM4, "Rapporto: ";6*NUM4/LANCI, "Differenza:  "; NUM4-LANCI/6
PRINT "Cinque:  totale "; NUM5, "Rapporto: ";6*NUM5/LANCI, "Differenza:  ";NUM5-LANCI/6
PRINT "Sei:  totale "; NUM6, "Rapporto: ";6*NUM6/LANCI, "Differenza:  "; NUM6-LANCI/6
```

Il ciclo "FOR…NEXT" in verde è quello che simula i lanci. Nell'istruzione precedente al ciclo, il programma vi chiede quanti lanci di monetine volete fare. Il risultato del lancio è definito dalla variabile RND. Ogni volta che il computer esegue la seconda istruzione del ciclo verde, RND produce un numero tra 0 e 1, che poi viene trasformato in un numero intero da 1 a 6 con l'istruzione INT(6*RND +1). Mettiamo che RND produca 0.634. Moltiplicato per 6 dà 3.804. Gli si aggiunge 1, altrimenti, dato che RND è quasi sempre minore di 1, non si avranno praticamente mai dei sei. Invece si avrebbero degli "zero" che non ci interessano.  Siamo ora a 4.804. INT taglia la parte dopo la virgola e quindi otteniamo 4. Questo è il risultato della simulazione di un lancio. La simulazione va ripetuta, naturalmente, per il numero di lanci, numero a cui abbiamo dato il nome di LANCI.
RND non dà dei numeri propriamente a caso: sono solo "pseudo a caso". Senza qualche accorgimento, ogni volta che incominciassimo da capo il programma otterremmo esattamente la stessa successione di numeri a caso. L'istruzione RANDOMIZE TIMER, in rosa,  chiede di basarsi sul tempo dell'orologio del computer per iniziare la sequenza di numeri a caso e ci toglie d'impaccio, perché è basata sul tempo misurato in centesimi di secondo a partire da mezzanotte. Questo tempo è praticamente sempre differente, a meno di iniziare l'esercizio esattamente alla stessa ora misurata al centesimo di secondo,  e viene usato ogni volta come "seme" di una nuova sequenza. Notate che tempi anche vicinissimi danno sequenze di numeri a caso anche diversissime.

Provate ad aumentare il numero di tentativi da seicento  a sessantamila a sei milioni. Notate che scegliendo un numero di lanci di questo tipo, le probabilità (1/6 per ogni numero del dado) saranno numeri interi. Osserviamo ad esempio la riga "sei" nella tabella. La prima colonna ci dice che su 600 lanci il rapporto fra il numero di "sei" usciti e il numero atteso moltiplicando la probabilità per il numero di lanci, è 0.93. Ora, per 600 lanci avremmo dovuto avere 100 "sei" (1/6 x 600).  Se il rapporto tra i lanci usciti e 100 è 0.93, vuol dire che abbiamo avuto 93 "sei". Quindi abbiamo avuto 7 (=100-93)  lanci "sei" meno di quanto ci aspettassimo. Questo -7 lo mettiamo in terza colonna, sotto il titolo differenza.  Dalla tabella vediamo che se avessimo puntato sul "quattro", sul "cinque" e sul "sei" un euro al colpo, mentre ci aspetteremmo di essere più o meno usciti pari, avremmo in tutto perso 12 euro. Aggiungendo i risultati per 60000 e 6000000 lanci io ho ottenuto questa tavola  (ricordate che si tratta di tentativi a caso e voi quasi certamente otterreste cifre diverse):

| | 600 lanci rapporto | 600 lanci differenza | 60000 lanci rapporto | 60000 lanci differenza | 6000000 lanci rapporto | 6000000 L differenza |
|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 1.2 | 20 | 1.0059 | 59 | 1.000504 | 504 |
| due | 1.0 | 0 | 0.9946 | -54 | 1.000638 | 638 |
| tre | 0.92 | -8 | 1.0049 | 49 | 1.000515 | 515 |
| quattro | 1.02 | +2 | 1.0162 | 162 | 0.998742 | -1258 |
| cinque | 0.93 | -7 | 0.9815 | -185 | 1.000712 | 712 |
| sei | 0.93 | -7 | 0.9969 | -31 | 0.998889 | -1111 |

La mia tavola ci dice (e le vostre tavole ci direbbero) che le frequenze si avvicinano sempre di più alle probabilità, nel senso che i "rapporti" diventeranno sempre più vicini ad 1. Questa osservazione è la base sperimentale della teoria delle probabilità.

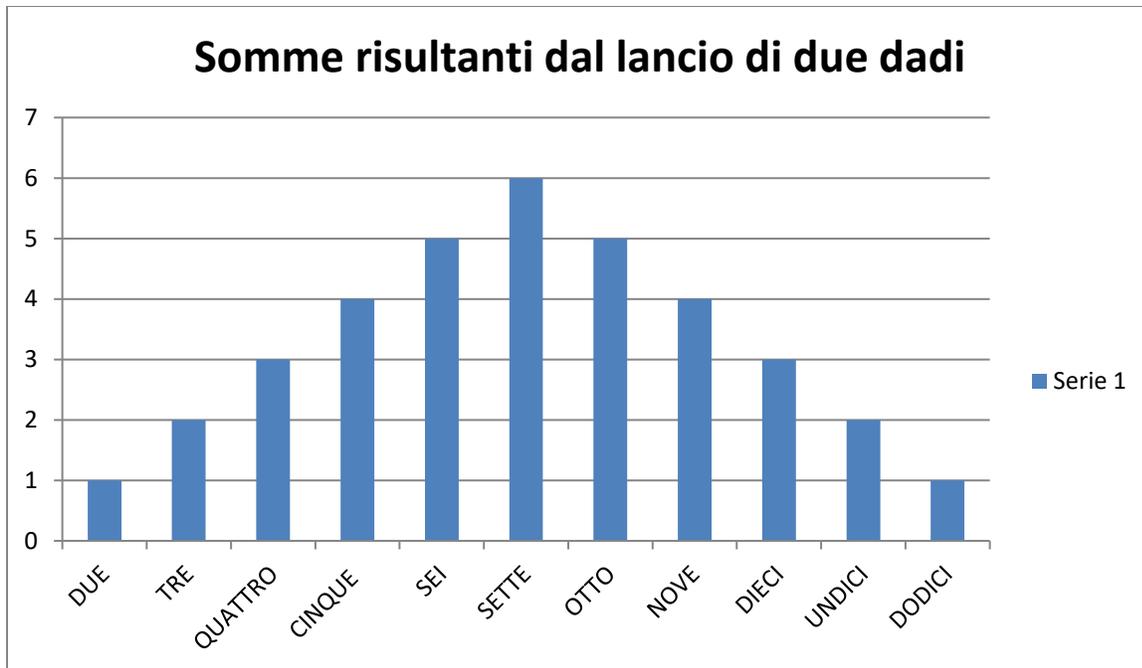
Ma notate bene che la differenza tra il numero di lanci che hanno effettivamente dato uno stesso risultato e 1/6 del numero dei lanci in genere cresce col numero totale di lanci, cioè il rapporto tra frequenze e probabilità tende a 1, ma la differenza tra frequenze osservate e probabilità non tende necessariamente a zero. **Questo, pochi lo sanno e immaginano che quanto più alto sia il numero di lanci, tanto minore sia questa differenza. No, no, no**. Il fatto che questa differenza in genere cresce vuol dire che potremmo anche non rientrare mai nelle nostre perdite, se continuassimo a giocare credendo che questa differenza debba tendere a zero, cioè che i guadagni a lungo andare debbano compensare le perdite. Continuando a giocare sul "quattro", sul "cinque " e sul "sei", per quanto le frequenze siano sempre più vicine alle probabilità vediamo che con 60000 lanci perderemmo 54 euro, e con sei milioni di lanci ne perderemmo 1657.
Questo non vuol dire che la differenza non sia mai zero o addirittura a nostro favore: chi ha giocato su "uno", "due" e "tre" ha guadagnato esattamente quello che noi abbiamo perduto. Può succedere, ma il fatto che nel caso osservato la differenza venga grosso modo moltiplicata per 10 moltiplicando per 100 il numero di lanci è evidente dalla tabella.

Adesso supponiamo che Arcibaldo ci proponga di giocare con due dadi e scommettere sulla somma dei risultati che appaiono sulle due facce.
Le possibilità sono 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 11, 12. Ma non ci cascate. Le probabilità non sono le stesse. Vediamo come si ottengono gli undici risultati

Notiamo che per ogni cifra del dado Uno, possiamo avere una qualunque delle 6 cifre del dado Due. Ognuna di queste combinazioni (cifra qualunque del dado 1 e cifra qualunque del dado 2) ha eguale probabilità se i dadi sono onesti. In tutto ci sono quindi 36 combinazioni. Analizziamo i risultati.

| dado 1 | dado 2 | somma |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| | 2 | 3 |
| | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| | 4 | 5 |
| | 5 | 6 |
| | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 3 |
| | 2 | 4 |
| | 3 | 5 |
| | 4 | 6 |
| | 5 | 7 |
| | 6 | 8 |
| 3 | 1 | 4 |
| | 2 | 5 |
| | 3 | 6 |
| | 4 | 7 |
| | 5 | 8 |
| | 6 | 9 |
| 4 | 1 | 5 |
| | 2 | 6 |
| | 3 | 7 |
| | 4 | 8 |
| | 5 | 9 |
| | 6 | 10 |
| 5 | 1 | 6 |
| | 2 | 7 |
| | 3 | 8 |
| | 4 | 9 |
| | 5 | 10 |
| | 6 | 11 |
| 6 | 1 | 7 |
| | 2 | 8 |
| | 3 | 9 |
| | 4 | 10 |
| | 5 | 11 |
| | 6 | 12 |

Ecco, ci sono tutte le trentasei possibilità. Ma vedete che le somme in terza colonna non sono egualmente divise fra gli undici risultati (da 2 a 12) possibili.
Potremmo anche fare un grafico di quante volte si presentano i risultati delle somme:

Ci sono 6 volte il 7 (quindi 6 casi favorevoli su 36, probabilità 1/6), 5 volte il 6 e l'8, 4 volte il 5 e il 9, 3 volte il 4 e il 10, due volte il 3 e l'11, una sola volta il 2 e il 12.
Se fate una simulazione, o lanciando una monetina o in QBASIC, trovate che di nuovo le frequenze seguono sempre meglio la tavola delle probabilità aumentando il numero dei tentativi (anche se le differenze tra il risultato previsto e quello ottenuto aumentano come con un dado).
Quindi, puntate sul 7, e mai sul 2 e sul 12.

Se giocaste con 3 dadi trovereste che di nuovo esiste un picco anche più pronunciato. Per vedere questo, se non usiamo mezzi più potenti, occorre fare la tavola delle 216 possibili combinazioni di uscite di tre dadi. Questa volta, le combinazioni più probabili per la somma dei risultati da tre dadi sono il 10 e l'11, con una probabilità su otto, cosa che quasi certamente Arcibaldo non sa.

Quando vedete che la tavola delle frequenze si discosta da quella delle probabilità, ciò vuol dire che molto probabilmente il dado o i dadi sono truccati. Sì, ma di quanto deve scostarsi perché noi possiamo giustamente insospettirci?
In fin dei conti potrò dare un argomento di plausibilità, ma una vera dimostrazione non la potrò dare, perché qui stiamo mescolando il mondo della matematica con quello della pratica, e il mondo della certezza con quello dei fatti, i quali sono sempre più o meno confusi.

Il più semplice problema di calcolo delle probabilità, che vale la pena studiare, è quello della monetina in cui si punta su testa o croce.
Qui, sempre se la monetina è onesta, ci sono due possibilità di eguale probabilità, quindi ½, o 50%, che esca testa e 1/2 che esca croce.
La monetina rappresenta anche (quasi) il caso della roulette, quando il giocatore punta sul rosso o sul nero. Nella roulette ci sono 18 caselle rosse e 18 caselle nere. Però ci sono anche uno zero (in Europa) o due zeri (in America). Quindi se puntate esclusivamente sul rosso (o sul nero), avete non 50% probabilità di indovinare, ma solo 18/37 ovvero 48,6% in Europa e 18/38, ovvero 47,4% negli Stati Uniti.

Questo dimostra un importante fatto: le case da gioco non sono state create per fare della beneficenza ma per spellare i giocatori. Sembrerebbe inoltre che i giocatori Americani siano più disposti degli Europei a farsi spellare.

Torniamo alla nostra monetina, che è un po' più onesta.

Ora un punto importante. Abbiamo lanciato la monetina ed è venuto testa. Su cosa puntiamo per il prossimo lancio? Qualcuno dirà testa, perché la monetina magari è disonesta e lui si aspetta che venga sempre testa. Qualcuno dirà croce, perché ci aspettiamo che alla lunga escano tante croci quante teste. Qualcuno farà altri ragionamenti e infine qualcuno dirà che le probabilità di testa e croce sono le stesse, sempre 1/2 sia per testa che per croce – e quindi si può puntare su quel che si vuole con la stessa probabilità di riuscita..

Per decidere che la monetina è disonesta, un lancio è decisamente troppo poco.
Finché si tratta di due lanci soltanto, il discorso è poco interessante, ma se supponete che testa sia uscita dieci volte di fila, chi non punterebbe su croce? Solo chi dice che la monetina è disonesta punterebbe ancora su testa (e qui forse incomincerebbe ad aver ragione, perché dieci teste di fila incominciano ad insospettire).
Ma se la moneta è onesta non c'è niente da fare: anche l'undicesima volta la probabilità che esca testa è 50% e quella che esca croce è ancora 50%.
Ad ogni lancio la probabilità è 1/2, e scrivendo T per testa e C per croce, la probabilità di avere CCCCCCCCCC o CCCTTCTTCT è la stessa ed è $(1/2^{10})$.

La monetina non ha memoria. Supponiamo che due amici abbiano scommesso con una monetina onestissima, ma che ha dato 100 volte di fila TESTA. I due se ne vanno e la monetina resta sul tavolo. Altri vengono a giocare, riprendono la monetina. Secondo quelli che ragionano sui ritardi, se sapessero la storia precedente, i nuovi venuti dovrebbero puntare su CROCE, ma l'idea sembra ridicola solo a pensarci.

Se lanciamo dieci volte la monetina è probabile che esca cinque volte testa e cinque volte croce. Però c'è anche la probabilità che esca 0 volte testa e 10 volte croce, 1 volta testa e 9 volte croce, 2 volte testa e 8 volte croce.
Notate però che per avere zero volte testa e 10 volte croce, ogni lancio deve essere croce. Invece, per avere una volta testa e 9 croce, quell'unico lancio testa può essere il primo, o il secondo, o il terzo...o il decimo. Non c'è dunque un solo caso possibile, ma ce ne sono 10. Per avere 2 volte testa possiamo avere testa il primo e il secondo lancio, oppure il primo e il terzo, oppure il primo e il quarto, fino al primo e il decimo. E poi anche il secondo e il terzo, il secondo e il quarto eccetera, fino al secondo e il decimo. Poi il terzo e il quarto eccetera, fino al terzo e il decimo. eccetera. Quante sono le varie combinazioni che ci danno due teste e 8 croci?
Ma questo non è altro che il problema di trovare il modo di fare squadre di due giocatori estratti da un club di 10. Cioè il risultato è

$$\binom{10}{2}$$

Andiamo a vedere il nostro triangolo magico, e troviamo che

$$\binom{10}{2} = 45$$

Troviamo così tutte le altre possibilità.

La probabilità di 1 teste e 9 croci è data dal prodotto delle probabilità di una testa (= 1/2) moltiplicata per il prodotto che vengano 9 croci ($1/2^9$) moltiplicate per il numero di modi in cui questa combinazione (1T,9C) può uscire, cioè 45.

Chiaramente ogni successione di dieci teste e croci ha una probabilità sempre data dal prodotto ($1/2^{10} = 1/1024$)) per un numero che compare nel nostro triangolo magico. Il picco, naturalmente è per 5 teste e 5 croci, con 1/1024 moltiplicato per 252, circa 1/4.

Dunque, se voi eseguite varie volte l'esperimento di lanciare dieci volte la monetina, la probabilità è che una volta su quattro abbiate cinque teste e cinque croci, poi circa una volta su cinque vi aspettate o quattro teste e sei croci o sei teste e quattro croci, e via di seguito, fino ad una probabilità su 1024 di avere 10 teste e 1/1024 di avere 10 croci.

Se sommiamo tutte queste probabilità abbiamo $1/2^{10}$ a fattor comune e poi la somma della linea 10 del nostro triangolo magico, che - come sappiamo - non è altro che $2^{10}$. Quindi la somma delle probabilità è 1, come deve essere.

Qui non stiamo più cercando qual è la probabilità che esca testa o croce, ma qual è la probabilità che in una serie di dieci lanci escano n teste e (10-n) croci. Ed il nostro risultato è che anche se per ogni lancio è egualmente probabile che esca testa o croce, su dieci lanci è più probabile che escano cinque teste e cinque croci.

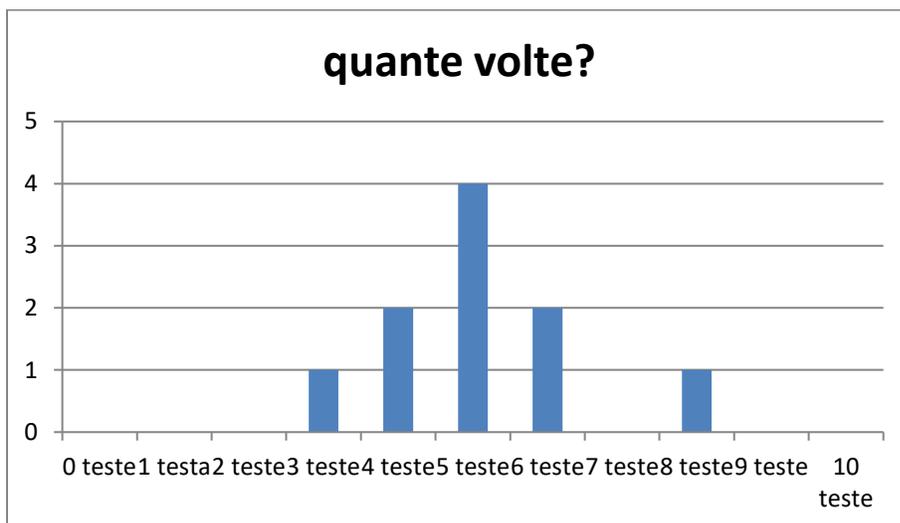
Simulazione in QBasic.

***PROGRAMMA NUMERO 5 IN QBASIC: SIMULAZIONE DI LANCIO DI MONETE***

```
CLS
PRINT “Dieci simulazioni di dieci lanci di una monetina onesta”.
RANDOMIZE TIMER
FOR I=1 to 10
PRINT “Simulazione “, I
FOR J =1 to 10
USCITO = INT(2*RND)
IF USCITO = 0 THEN SYMB =”T”
IF USCITO = 1 THEN SYMB = “C”
PRINT SYMB;
NEXT J
PRINT “ “
NEXT I
```

Risultati di dieci simulazioni:

| Simulazione | Sequenza | Numero T |
|---|---|---|
| 1 | TCCCTTCTCT | 5 |
| 2 | TCTTTCCTTC | 6 |
| 3 | TTTCCCCTCT | 5 |
| 4 | TCCCCCTCTC | 3 |
| 5 | CCTTCTTCTC | 5 |
| 6 | TTCTCTCCTT | 6 |
| 7 | CTCTTTCCCT | 5 |
| 8 | TTTTTTTCCT | 8 |
| 9 | CCTTTCCCCT | 4 |
| 10 | CTCTTCCTCC | 4 |

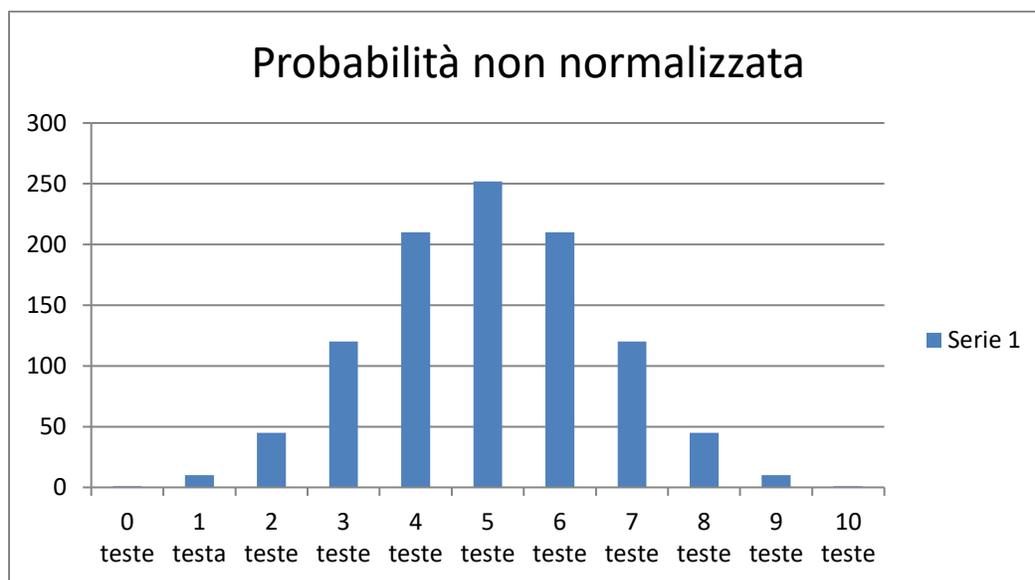
Magari facciamo pure un grafico:

Aha, dice l'amico che gioca sui ritardi. Ti ho preso. Va bene, non è certo che escano 5 teste e 5 croci, ma la probabilità che escano cinque teste e cinque croci è più alta di quella che escano 10 teste e zero croci. Quindi è giusto che dopo nove teste io punti su croce.

NO, per due ragioni che sono due modi di dire la stessa cosa.
Primo modo: Quando i lanci sono stati fatti, non contano più nel calcolo delle probabilità. Quando sappiamo quello che è avvenuto non si parla più di probabilità, ma di certezza, e dobbiamo ricominciare capo.
Secondo modo: è vero che la probabilità che escano 5 teste e cinque croci è 252 volte la probabilità che escano 9 teste e una croce, ma questo proviene dalla somma di probabilità di diverse successioni di teste e croce che già sappiamo che non si sono verificate. Una sola di queste possibilità si è verificata (TTTTTTTTT), ed il prossimo passo può dare soltanto o testa o croce on 50% di probabilità ciascuna.

Ma il NO che ho detto vuol solo dire che il ragionamento è sbagliato, non che non si debba

puntare su Croce. Testa o Croce è indifferente e quindi, se proprio uno vuole scommettere, puntando su Croce non sarà danneggiato. Semplicemente non vincerà in più del 50% dei casi.

Adesso torniamo al problema che ci eravamo proposti. Quanto è probabile che lanciando una monetina onesta non esca nessuna testa in 10 lanci? L'abbiamo già detto più sopra, è 1/1024, e con un risultato del genere non è molto consigliabile usare quella monetina.
In simile modo possiamo calcolare le probabilità che escano 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8,9,10 teste su dieci lanci.

Prepariamo un diagramma con le probabilità che ci aspettiamo:

Per avere le probabilità normalizzate bisogna dividere per il prodotto delle probabilità dei singoli lanci, o, se vogliano, per la somma di tutti i numeri che appaiono nella decima riga del triangolo di Tartaglia. Prodotto e somma valgono comunque entrambi $2^{10}$, cioè 1024.
Se vogliamo sapere qual è la probabilità che escano "almeno" nove teste, dobbiamo sommare i valori della probabilità non normalizzata per nove e per dieci teste, e dividere sempre per il totale. Abbiamo così la seguente tabella:

| | Somma delle probabilità non normalizzate | Probabilità normalizzate (cioè divise per 1024) |
|---|---|---|
| Almeno 6 teste | 1+10+45+120+210 = 386 | 0.3770 |
| Almeno 7 teste | 1+10+45+120= 176 | 0.1719 |
| Almeno 8 teste | 1+10+45 = 56 | 0.0547 |

| Almeno 9 teste | 1+10 =11 | 0.0107 |
|---|---|---|
| 10 teste | 1 =1 | 0.00098 |

Con una moneta non truccata la probabilità è 1 su mille che escano dieci teste in 10 lanci, è uno su cento che escano almeno nove teste, è circa 5% (una su venti) che ne escano almeno otto eccetera. A questo punto noi dobbiamo decidere che “livello di confidenza accettiamo”. A naso si pensa che 5% rappresenti un rischio che ci si può prendere, cioè noi ci fidiamo della monetina se la probabilità di avere un determinato numero di teste, o più, è superiore al 5%. Noi vediamo che ciò accade a circa 8 teste. Quindi se ci sono meno di 8 teste su dieci, accettiamo la monetina come onesta con un decente livello di confidenza. Naturalmente le teste non devono essere meno di due, perché allora cadiamo nell’altro estremo.

Ogni tanto leggete sui giornali che tutti i pensionati d'Italia giocano i loro risparmi al lotto sopra un "numero in ritardo". Se il 67 non esce da 100 settimane sulla ruota di Napoli, tutti si aspettano che esca la 101 esima e puntano sul 67 i loro risparmi. Prima o poi, è vero, il 67 esce, ma non esce quasi mai quando i pensionati lo aspettano.
Sia ben chiaro che quando si parla di probabilità noi non sappiamo se il numero uscirà o non uscirà. Quindi magari voi convincete la zia Agata a non giocare e poi il 67 esce; lei vi maledirà per il resto dei suoi giorni e poi vi diserederà. Poco male, perché dopo tutto non ha giocato e vinto sul 67.

Dunque si possono dare solo consigli, ma non si potrà mai convincere gli amici e parenti posseduti dal "demone del gioco". Non ci riuscirete mai, e riuscirci comporterebbe un rischio. Lasciate perdere.

In ogni caso, giocare sui ritardi quanto meno non danneggia il giocatore, perché non riduce le sue probabilità di vittoria: semplicemente non le aumenta. E poi giocare sui ritardi, se non diventa una religione, presenta un piccolo vantaggio: si gioca (e si perde) meno sovente.

## XXIV. NUMERI A CASO.

Ogni tanto può essere utile sapere come fare a generare sequenze numeri a caso. Per esempio non avete una monetina e volete simulare i lanci. Però non avete un programma QBasic o altro simile.

1) Se avete un PC collegato con Internet, potete trovare dei generatori di numeri caso in linea. Cercate o “Generatore di numeri casuali” o “Random number generator” e troverete diversi siti che generano quanti numeri volete e come li volete, per tutti i gusti.

Oppure ve li producete voi.

2) Un metodo vecchio è basato sul fatto che, per quanto se ne sa, le infinite cifre di π (e di altre costanti della matematica) si seguono casualmente. Allora si cerca un sito che dia π con molte cifre (su Wikipedia trovate 100000 cifre, ma ci sono dei siti che ne danno di più), e scegliete di lì. Qualcuno può dire:”Ma π comprende le cifre tra 0 e 9 e a me ne servono 2, perché voglio simulare i lanci di una monetina.. Facile. Scartate le altre. Questo vuol dire che ogni 100 cifre ne avrete solo una ventina buone. Qui ci sono le prime 100 (a parte il 3 prima della virgola):

```
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164
0628620899 8628034825 3421170679
```

Indicando 1 come Testa e 2 come Croce, otteniamo la sequenza TTCCCCCTTTCCTCCCCCTT, 20 lanci buoni, con 8 T e 12 C. Ma le altre non buttiamole via. Possiamo anche identificare T con 2 e C con 3, eccetera.
Naturalmente potete partire da dove volete, potete scegliere una sequenza lunga quanto volete (ovviamente inferiore a 100000), potete identificare altre due cifre a piacere con T e C, o per esempio le cifre pari con T e le dispari con C.
Con quest’ultimo metodo le stesse cento cifre vi danno dieci sequenze di dieci lanci:

| Sequenza | Risultati | Numero di Teste |
|---|---|---|
| 1 | CTCCCTTCCC | 3 |
| 2 | TCCCCTCTTT | 5 |
| 3 | TTTCCTCTCC | 5 |
| 4 | CTTTTTCCCC | 5 |
| 5 | TCCCCCCCCT | 2 |
| 6 | CTTTCCTCTT | 6 |
| 7 | CCTCTCTCTT | 5 |
| 8 | TTTTTTTTCC | 8 |
| 9 | TTTTTCTTTC | 8 |
| 10 | CTTCCCTTCC | 4 |

Usando i nostri metodi, potete anche verificare che la “monetina pigreco” è onesta.
E potete usare altri trucchi. Per non parlare del fatto che ci sono persone che sanno a memoria diverse centinaia di cifre di pigreco.

3) Se non avete accesso a un PC o a Internet, avete altre possibilità. La più semplice è il più antico metodo di generazione di numeri “pseudo casuali”. Questo fu inventato dal matematico Von Neumann nel 1946. Lui aveva a disposizione un calcolatore che poteva fare diverse operazioni, ma aveva poca memoria. Noi possiamo operare con una calcolatrice (o anche a mano, ma qui diventa dura).
Si sceglie a caso un numero di quattro cifre. Per esempio se è l’una del mattino,12 minuti,30 secondi (0**1:12:3**0) tenete quattro cifre a piacere, meglio se non hanno zeri alla fine. Qui si tiene 1123. Questo è il nostro primo numero casuale.
Si fa il suo quadrato, e si ottiene 1**2611**29. Si tengono le quattro cifre di mezzo che terminino con la terzultima: 2611. Questo è il nostro secondo numero casuale.
Si fa il suo quadrato e si ottiene 6**8173**21. Si tengono quattro cifre che terminino con la terzultima: 8173. Questo è il nostro terzo numero casuale.
Si fa il quadrato: 66**7979**29.
Il quinto numero casuale sarà 7979. E poi potrete calcolare il sesto, 6644, il settimo, 1427 eccetera.
I numeri casuali li potete poi usare come vi pare. Potete metterli uno dietro l’altro, ottenendo 1123261181737979966441427…
Oppure potete interpretare ciascuno di essi come parte decimale di un numero tra 0 e1, e poi usare il trucco INT che usa il Programma QBasic.
Von Neumann era ben conscio del fatto che questo metodo non sempre produce lunghe sequenze di numeri a caso, ma ogni tanto ricade in qualche sorta di periodicità. Tuttavia riteneva che, dati i mezzi a sua disposizione, questo fosse il metodo che presentava i maggiori vantaggi.

## XXV. CHE GIORNO DELLA SETTIMANA SARA' SANT'ANNA?

Se lavoriamo con i numeri naturali (= interi positivi), non ci sono numeri decimali. Semplicemente 10/7 = 1 + resto 3. Addizioni e moltiplicazioni funzionano bene, sottrazioni richiedono che il minuendo sia maggiore del sottraendo; le divisioni possono dare un resto.

Il "principe" trovò che i resti hanno delle interessanti proprietà.
Intanto, è evidente che i resti di una divisione di un numero qualsiasi (dividendo) per un numero N (divisore) sono necessariamente più piccoli di N. Ci sono quindi N-1 possibili resti, oltre allo 0, nel caso in cui il dividendo sia divisibile per N.

Abbiamo allora delle belle proprietà facili da ricordare:
- il resto della somma è la somma dei resti
- il resto della differenza è la differenza dei resti
- il resto del prodotto è il prodotto dei resti.

Resti di cosa? della divisione per un numero qualunque. Dovremmo scrivere per disteso: **il resto della divisione della somma di due o più numeri per un divisore qualunque è uguale alla somma dei resti delle divisioni di ciascuno degli addendi per lo stesso divisore.**

Consideriamo per esempio i resti della divisione per 7.
Il resto della somma (10 + 24) **diviso sette** è eguale alla somma
Resto di 10 (diviso sette) + Resto di 24 (diviso sette).
Ora il resto della somma di 10+24 (=34) diviso 7 è 6, che è appunto la somma dei resti di 10/7 (=3) e di 24/7 ( = 3).

É strano? No. Un numero qualunque può essere scritto come N= 7 n + (resto di N diviso 7); un secondo numero come M= 7m + (resto di M diviso 7).
Sommiamo: N+M= 7n+7m+ resto di N + resto di M
Cioè N+M= 7(n+m) + resto di N + resto di M
Dividiamo per sette ambo i lati.
A sinistra abbiamo Resto (M+N). A destra 7(n+m) non dà resto, perché è un multiplo di sette, e

rimangono Resto N+Resto M.  Che è quel che volevamo dimostrare.
Se (resto di N diviso 7) + (resto di M diviso 7) fosse maggiore di 7, si dovrebbere togliere 7 per trovare un resto minore di 7.  Si provi con 12+24: il resto della somma è 1, mentre la somma dei resti è 8. Ma 8 è maggiore di 7, per cui si deve sottrarre 7 e si trova 1, il risultato voluto.

Si provi a seguire lo stesso ragionamento per  dimostrare la stessa cosa per il prodotto dei resti.

E tutto questo, serve a qualcosa?
Io penso che se ci si chiede questo, di già la nostra vita ha preso una sua direzione, che lascia poco spazio al godimento intellettuale. Ciò può non essere una tragedia, ma certo è una perdita.

Comunque.

Siete a pranzo con la vostra famiglia e zia Agata dice: “Bisogna andar a trovare nonna Anna il giorno della sua festa, 26 luglio. A proposito, che giorno della settimana è il 26 luglio?”. Voi sapete naturalmente che oggi 7 aprile è giovedì. Normalmente nessuno sa come fare a trovare che giorno sarà il 26 luglio. Molti non credono neanche che sia possibile. Altri ricordano l'esistenza di calendari perpetui, che però non sono mai a disposizione e con cui è facile commettere errori.   Si vanno quindi a cercare almanacchi, calendari, agende. Magari non si trovano, magari sono quelli dell'anno prima. Magari nessuno ricorda che praticamente ogni telefonino cellulare contiene un calendario perpetuo e una piccola calcolatrice. Un disastro, una perdita di tempo. Eppure non è così difficile. Qui intervenite voi con sguardo fermo e occhio sereno e magari, ma non necessariamente, carta e matita.

La chiave di tutto è che, se oggi 7 è giovedì, tra una settimana (cioè  sette giorni, cioè il 14)  sarà ancora giovedì, e lo stesso sarà tra due, tre, cinque, diecimila settimane. Una settimana sono 7 giorni, 2 settimane sono 14 giorni, 5 settimane sono 35 giorni, 10000 settimane sono 70000 giorni. Se dividiamo per sette otteniamo sempre resto zero. Numero esatto di settimane.
Invece tra una settimana e un giorno (il 15 aprile) sarà giovedì e un giorno, cioè  venerdì. Lo stesso tra due settimane e un giorno, tra mille settimane e un giorno.
Tra una settimana e due giorni sarà sabato e così via. Vedete che quello che importa è il resto della divisione per sette del numero di giorni tra oggi e la data di cui vogliamo sapere il giorno della settimana.
Resto 0 vuol dire lo stesso giorno di oggi (giovedì), resto uno vuol dire lo stesso giorno di domani (venerdì), per il resto 6 contate sulle dita: 1 - venerdì, 2 - sabato, 3 - domenica, 4 - lunedì, 5 - martedì, 6 - mercoledì.  Resto 7 è come resto 0 ed è di nuovo giovedì.

Probabilmente già vedete quel che va fatto. Bisogna trovare quanti giorni ci sono fra il 7 aprile e il 26 luglio e dividere per sette. Questo ci dice quante settimane ci restano e, quel che più importa, ci dà  un resto in giorni della settimana. Se non c’è resto, vuol dire che il giorno è lo stesso di oggi.

Quanti giorni ci sono dal 7 aprile al 26 luglio?
Ne restano 23 in aprile, 31 in maggio, 30 in giugno, 26 in luglio, totale 110. Dividiamo per sette, il resto è 5.  Quindi  il 26 luglio è cinque giorni dopo giovedì (oggi), cioè  un martedì.

Ah, dice zia Agata per mettervi in trappola, e l'anno prossimo?   Che giorno sarà il 26 luglio - he

he he? Qui ci aiuta il fatto che il resto della somma è la somma dei resti. Ora un anno non bisestile dà resto 1 nella divisione di 365 per sette, il che vuol dire che nel passare da un anno all'altro tutte le date avanzano di un giorno della settimana.
Dunque l'anno prossimo il 26 luglio sarà mercoledì.
Potete estendere questo tipo di ricerca e farvi le vostre regole. Non dimenticate gli anni bisestili che fanno avanzare di due giorni, eccetto nei primi due mesi, quando il giorno aggiuntivo (29 febbraio) non è stato ancora aggiunto.
Il problema con il calendario è che i mesi hanno durate più o meno arbitrarie intorno ai 30 giorni e non ci sono ragioni matematiche o scientifiche perché ciò sia così. Ci sono ragioni storiche, non prive di interesse, ma per queste suggerirei di leggere una buona enciclopedia.

E se non avete carta e matita, ci si arriva lo stesso? Ma certo. Semplicemente, invece di sommare i giorni dei mesi e alla fine dividere per sette e tenere il resto, si possono sommare i resti della divisione per sette progressivamente, scartando i sette in modo da restare sempre con un numero inferiore a sette.
Nel nostro caso si procederebbe così:
23 giorni in aprile, diviso sette fa 3, resto 2. Teniamo 2.
Maggio 31 giorni, diviso sette fa 4, resto 3, sommiamo al 2 che avevamo da aprile, fa 5, teniamo 5.
Giugno 30 giorni, diviso sette fa 4, resto 2, sommiamo al 5 che avevamo, dà 7, togliamo 7, dà 0.
Luglio, 26 giorni, diviso 7 dà 3, resto 5. Più lo zero che avevamo, troviamo ancora 5. Questo è il risultato finale, che avevamo già ottenuto.
Con un po’ di esercizio lo si fa a mente così in fretta da sbalordire chiunque.

Quando non c'erano calcolatori meccanici o elettronici, una volta fatta la moltiplicazione si faceva la prova del 9.
Spiegare è più lungo che fare, come in molti casi in matematica.
Supponiamo di fare 25 x 78 = 1950 (lo si può fare rapidamente a mente!)
La prova del nove consisteva nel sommare le cifre di 25 (=7), quelle di 78 (15, e sommarle di nuovo =6) moltiplicare 6x7 = 42, sommare le cifre = 6. Ora si vede se la somma delle cifre di 1950 dà 6: infatti dà 15, e poi 1+5 =6.
Dato che i due numeri che abbiamo ottenuto sono eguali, possiamo dire che il risultato è esatto.
Ma perché si chiama prova del nove? Che cosa abbiamo fatto, veramente? E poi, il risultato è veramente esatto?

Noi abbiamo semplicemente messo in pratica il fatto che il prodotto dei resti (della divisione per 9) di moltiplicando e moltiplicatore è uguale al resto (della divisione per 9) del prodotto. Dunque per questo motivo si chiama prova del nove.

Qualcuno dirà che in realtà non abbiamo fatto nessuna divisione per nove. Come sappiamo quali sono i resti? Ebbene, il resto della divisione di un numero per nove è dato dalla somma delle sue cifre, ( se è il caso risommandole fino a che si arriva ad un numero minore di nove).

Qui qualcun altro si potrebbe porre delle domande:
Come è possibile che il resto della divisione di un numero per nove sia dato dalla somma delle sue cifre?
É completamente affidabile, questa prova del nove?

E poi, magari si possono trovare altri simili prove, non del nove, ma del 3 o del 5 o del 7....

Per quanto riguarda la prima domanda, la risposta non è difficile. Abbiamo detto che il resto della somma è uguale alla somma dei resti ed il resto del prodotto è eguale al prodotto dei resti.

**Ogni numero con cifre ABCD vuol dire in pratica 1000·A+100·B+10·C+D.**

In primo luogo osserviamo che la divisione di 10 per 9 lascia resto 1.
Possiamo trovare il resto della divisione di 100 per 9 sia facendo la divisione con forza bruta, sia notando che il resto di 10 x 10 = resto 10 x resto 10. In ogni caso fa 1.
E 1000? la divisione diretta è più lunga, ma noi moltiplichiamo resto 10 x resto 10 x resto 10, e troviamo ancora 1.
Dunque il resto della divisione per nove del numero "ABCD" è dato dal resto della somma (A x resto di 1000+B x resto di 100+ C x resto di 10 + D) = resto della somma (A+B+C+D).
Anche questa somma potrà essere un numero della forma 10 q + r, e di nuovo avremo che il resto è (q+r). Insomma, tanto faremo che il resto sarà sempre lo stesso, e ci troveremo con un numero minore di 9.

Per quanto riguarda la seconda domanda, se la prova del nove sia affidabile, è chiaro che passando dai numeri ai loro resti della divisione per nove classifichiamo tutta l'infinità dei numeri naturali in 9 resti, contando lo zero. Quindi abbiamo perduto una certa quantità di informazione. Infatti, dalla prova del nove non possiamo ricostruire l'operazione originale. Dato poi che si tratta di resti, vediamo che se al prodotto che vogliamo verificare aggiungiamo (o togliamo) tanti nove quanti vogliano, il suo resto della divisione per 9 è sempre lo stesso. (Nell'esempio fatto, se avessimo detto che 25 x 78 fa 1968 invece di 1950, la prova del nove ci avrebbe detto che il risultato è giusto, e invece non lo é).

La terza osservazione è corretta. Ci sono anche prove del 2, del 3, del 4, del 5, ma, se provate a costruirle (operando sui resti), vedrete che dicono poco. La prova del 7 è troppo complicata, perché i resti della divisione di 10 per 7, di 100 per 7 eccetera, non sono immediati da ricordare. C'è però una prova che funziona bene, quasi come quella del nove, ed è quella dell'undici.

Per ora ne dò solo un cenno:

Qui bisogna osservare che il resto di 10/11 dà 10. Ma potremmo anche dire che dà -1, nel senso che manca un'unità per arrivare a 11.
A questo punto abbiamo la chiave in mano. Il resto di 100/11 sarà 1, a cui si può arrivare o facendo la divisione e trovando che 100/11 = 9 con resto ,. Ci si può però anche arrivare facendo il quadrato del resto di dieci, cioè (-1)(-1)=1.
Abbiamo quindi, chiamando $R_{11}$ il resto della divisione per 11:
$R_{11}$ di ABCD =
$R_{11}$ di 1000 x $R_{11}$ di A + $R_{11}$ di 100 x $R_{11}$ di B + $R_{11}$di 10 x $R_{11}$C + $R_{11}$D =
(-1)A + (+1) B + (-1) C + D.
Perché ABCD sia divisibile per 11 ( cioè $R_{11}$(ABCD)=0) occorre quindi che –(A+C)+(B+D)=0.
In conclusione, la somma delle cifre di posto dispari meno la somma delle cifre di posto pari dà

zero.  O, se si vuole, la somma delle cifre di posto pari è uguale a quella delle cifre di posto dispari (da qualsiasi parte incominciamo a contare).

## XXVI. GIOCHI ELEMENTARI

Un matematico diceva: Dio ha creato i numeri naturali, 1, 2, 3, 4, 5, 6, e l'uomo tutto il resto. Tutta la matematica è lì dentro. Bisogna prendere familiarità coi numeri naturali. Questo lo si può fare fin da piccoli, prendendo oggetti simili (magnetici ?) e ordinando i vari numeri in rettangoli e quadrati, completando sempre righe e colonne.

e così via.

I numeri che permettono due sole disposizioni (una linea orizzontale o una linea verticale) sono detti numeri primi. Nella nostra figura sono in rosso.
I numeri che possono essere messi in forma di quadrato con lati eguali sono i quadrati perfetti.

Nella nostra figura ce n’è uno solo, in blu.

Se continuiamo la tavola fino a cento, vediamo che i numeri primi sono venticinque (*) e i quadrati sono dieci (**). Questi numeri primi e quadrati sono riportati in fine sezione.

Noi che siamo già esperti vediamo subito che i lati dei rettangoli o dei quadrati sono i divisori del numero.

Se stiamo attenti vediamo che ci sono diverse relazioni fra i quadrati.

Supponiamo di voler esaminare come si passa dal quadrato di due (= 4) al quadrato di 3 (= 9). Si tratta di aggiungere un “bordo” di oggetti all’esterno,  in tutto 5 oggetti. Se facciamo lo stesso esercizio per passare da un qualsiasi quadrato al successivo, notiamo che dobbiamo sempre aggiungere un numero dispari, il quale, ricordiamo, ha sempre la forma 2 n + 1.

Il numero che aggiungiamo, però, non è un numero dispari qualunque o difficile da immaginare. E’ il numero 2 n + 1 ottenuto prendendo come  n il lato del quadrato a cui vogliamo aggiungere il bordo. E con questo otteniamo il quadrato di lato (n+1).

Ma questo ci dà un'altra regola pratica per il calcolo rapido, cioè per battere il calcolatore.
Il quadrato di 31, cioè il prodotto di 31 x 31 è dato dal quadrato di 30, che possiamo scrivere subito come 900, a cui si aggiunge il numero dispari 2 x 30 + 1, cioè 61, totale 961.
Se poi si aggiunge il numero dispari successivo, che è 63, si ottiene 1024, il quadrato del numero successivo a 31, cioè  di 32.

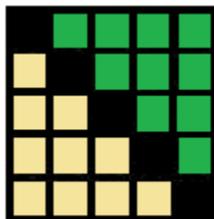
Dunque i quadrati si ottengono uno dietro l’altro sommando i numeri dispari successivi uno dietro l’altro.

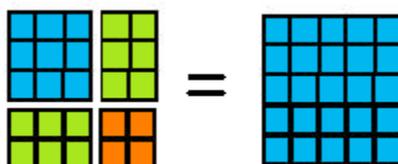
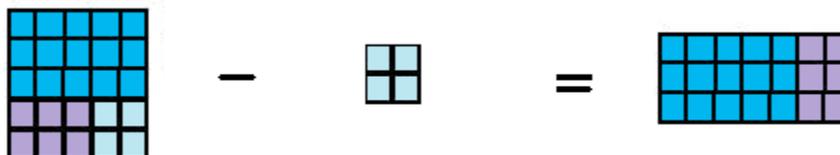
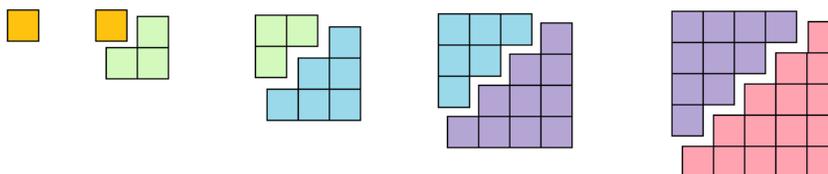
Qui possiamo vedere se questo è vero usando manipolazioni puramente numeriche, senza disegni. Noi vogliamo far vedere che la somma dei numeri dispari da 1 a (15=2 x 7 + 1) è appunto il quadrato di (7+1).

Sappiamo come fare questo gioco. Intanto, 2 x 7 + 1 = 15  ed il doppio della somma è dato da:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |

La somma di ognuna di queste colonne vale 16 e ce ne sono 8. Totale 128. Ma con questo abbiamo calcolato il doppio della somma, che quindi vale la metà, cioè  64 , che è proprio 8 x8, cioè (7+1)(7+1)..

Quelli più avventurosi tra i lettori possono
1) cercare una formula generale per la somma di numeri dispari consecutivi,
Per esempio, il disegno qui sotto può dare un'idea, ma non è l'unico modo.

Altrimenti potremmo notare che nel metodo da noi adottato per trovare la somma dei numeri dispari da 1 a 15 abbiamo sommato n+1 volte il numero (2n+1)+1, e poi diviso per 2.

2) considerare il disegno qui sotto e vedere se ricorda qualcosa.

3) E quest'altro?

E poi qui abbiamo un altro modo di costruire quadrati, quello usato nel Triangolo di TP

Magari vi convincete che giocare con i quadratini come i bambini delle elementari può comunque dare dei risultati simpatici.

A questo punto, anche se non c’entra niente, vorrei dare la soluzione del problema enunciato in precedenza, di trovare i numeri che seguono 5, 2, 9, 8, 4, 6, 7, ..
Sono 3, 1, 0.   I numeri sono in ordine alfabetico.

(*) I venticinque numeri primi minori di 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
(**) I dieci quadrati minori di 100:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

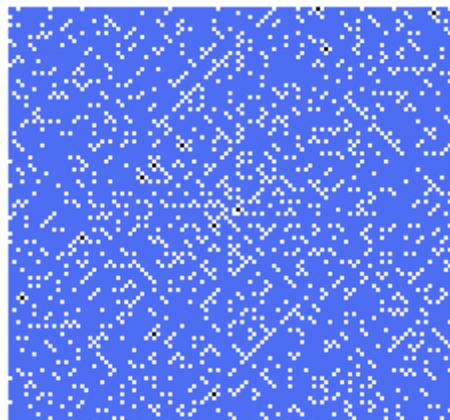
## XXVII. NUMERI PRIMI

Dunque abbiamo incontrato i numeri primi. Ogni numero primo p è divisibile senza lasciare resto solo per p e 1. I numeri primi vengono incontrati subito in aritmetica ed hanno notevoli proprietà, alcune spiegate da duemila anni, altre mai spiegate.

1) I numeri primi sono infiniti. Questo fu dimostrato una volta per tutte da Euclide.

2) Non c'è alcun ordine nella distribuzione dei numeri primi – o almeno non è ancora stato trovato. In particolare, dato un numero primo non è stato finora trovato alcun modo di indicare a colpo sicuro il successivo. Che in matematica, scienza dell'ordine, si trovi subito il disordine, è quanto meno stupefacente.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Qualcuno [[Ulam]] provò anche a ordinare i numeri sul piano, in una sorta di spirale. Si vedono moltissimi allineamenti che sembrano portare qualche ordine. Ma gli allineamenti terminano, allineamenti nuovi compaiono e poi ci sono anche numeri isolati. A sinistra vediamo come incomincia la distribuzione spirale dei numeri primi, che a destra è data per un numero assai maggiore di numeri (l'azzurro mi si è un po' scurito da sinistra a destra)..

Mentre di file continue di punti bianchi non se ne vedono, ci sono invece almeno quattro file senza punti bianchi che partono più o meno dal centro del diagramma di destra. Finiranno in qualche punto bianco, o continueranno all'infinito?

**XXVIII. INFINITI NUMERI PRIMI?**

Sì, i numeri primi sono infiniti, e la dimostrazione la diede Euclide duemila anni fa. Ed è assai semplice.

Anzitutto ricordiamo come si fa a fare l'elenco di tutti i numeri primi. Si usa il cosiddetto "crivello di Eratostene". Cioè si scrivono tutti i numeri interi uno dietro l'altro:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 …

Poi si incomincia da 2: 2 lo si tiene, ma si tolgono tutti i multipli di 2, cioè i numeri pari.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 …

Poi si prende il primo numero ancora bianco, cioè non pari, che è 3, lo si tiene, ma si tolgono tutti i multipli di 3. Naturalmente se un numero è già stato escluso, perché è anche multiplo di 2, non occorre toglierlo di nuovo.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 …

Poi si prende il prossimo numero ancora senza colore, che è 5, lo si tiene, e si tolgono tutti i suoi multipli

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 …

Poi si prende il prossimo numero ancora senza colore etc. Ma noi vediamo che fino a 40 bastano i multipli di 2,3,4,5. I numeri senza colore sono i numeri primi. Non so con precisione da dove venga il nome. Qui possiamo pensare che siano semplicemente i primi di una catena di multipli.

I numeri primi che abbiamo trovato sono:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 ….

Qualcuno potrebbe tentare di scoprire quale sarà il primo multiplo di 7 o di 11 per cui dovremo usare un nuovo colore, cioè che non è già multiplo di qualche numero più piccolo. La risposta è semplice e suggerirei di provare a trovarla.

Adesso dimostriamo che i numeri primi sono infiniti.
Supponiamo di conoscere solo i primi quattro numeri primi 2,3,5,7, e di chiederci se ce ne siano altri.
Facciamo il prodotto ed aggiungiamo 1. Cioè costruiamo il numero

**$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$**

Bene, N non può essere multiplo di nessuno dei primi quattro primi, perché dividendo N per uno di loro abbiamo invariabilmente resto 1, in quanto il primo addendo $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ è divisibile per qualsiasi dei quattro primi, e quindi dà resto zero, ma ci rimane il secondo addendo, che vale 1 . E sappiamo che " il resto della somma è uguale alla somma dei resti". Quindi, o N è un numero primo lui stesso, o è divisibile per un numero primo diverso da (e cioè maggiore di) qualsiasi numero tra i primi quattro. E siccome questo lo possiamo fare sempre, purché prendiamo tutti i numeri primi fino ad uno qualunque, p, vediamo che il sistema ci permette sempre di aggiungere un nuovo numero primo.

Nel nostro caso N= 211.

Come facciamo a sapere se è un numero primo? Diventereste ricchi se sapeste un metodo infallibile e veloce, valido per tutti i numeri primi. Molti dei metodi esistenti sono solo varianti del metodo di forza bruta, che consiste nel provare a dividere 211 per tutti i numeri primi inferiori a 211 uno dopo l'altro. Però ho il piacere di annunciare che il compito non è così lungo come sembra: non dobbiamo fare la prova con **tutti** i numeri primi più piccoli di 211.
Se un numero è il prodotto di due numeri, ci sono due casi possibili:
1) o i due numeri sono eguali, nel qual caso abbiamo trovato la radice quadrata,
2) oppure l'uno è maggiore e l'altro è minore della radice quadrata. In particolare non possono essere tutti e due maggiori della radice quadrata.
Quindi ci basterà dividere N=211 per tutti i numeri primi minori della sua radice quadrata, che vale circa 14.5. Ora 211 non è divisibile per 2,3,5,7, come già sappiamo (per il modo con cui l'abbiamo costruito), né , evidentemente, per alcuno dei loro multipli. Ci restano 11 e 13, che sono minori o eguali a 14.5. Ma 211 non è divisibile per 11 (la somma delle cifre di posto dispari vale 3 e la somma delle cifre di posto pari vale 1). Inoltre non è divisibile per 13, come possiamo verificare facendo finalmente **una** divisione, e quindi abbiamo trovato un nuovo numero primo, 211. Ma ricordate bene, 211 non è il primo numero primo dopo 2,3,5,7.

C'è un'altra curiosa proprietà dei numeri primi che pochi conoscono. Se il più piccolo divisore primo di un numero N è maggiore della sua radice cubica, allora il numero N è il prodotto di due soli numeri primi. Quindi, se fino alla radice cubica di N non troviamo divisori, o N è primo o è il prodotto di due soli numeri primi. Ad esempio, la radice cubica di 211 vale circa 6, e avremmo potuto dire immediatamente che 211 o è primo o ha al massimo due fattori. Perché vale questa proprietà? Se il più piccolo divisore di N, che chiameremo p, è maggiore di $N^{1/3}$, vuol dire che il numero P che risulta dividendo N per p, ed è il più grande divisore di N, è minore di $N^{2/3}$. Se P è a sua volta fattorizzabile, come sappiamo deve avere un divisore più piccolo della radice quadrata di $N^{2/3}$, cioè più piccolo di $N^{1/3}$. Ma di questi numeri non ne abbiamo trovati. Quindi P è primo anche lui.

Ripeto che il sistema non garantisce neanche che il numero trovato sia primo. Sarebbe troppo bello.
Infatti: (Prodotto dei numeri primi fino a 11) + 1= 2311, che è primo
(Prodotto fino a 13) + 1= 30031, che non è primo in quanto vale (59 x 509). In compenso abbiamo trovato non uno, ma due numeri primi maggiori di 13.

## XXIX.  SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI

Una delle prime cose che si insegnava in prima media ai miei tempi era la scomposizione in fattori primi, esercizio poco attraente, anche perché fatto senza sapere quello che abbiamo appreso alla fine del capitolo precedente, cioè  che per stabilire se un numero - anche relativamente grande - è primo non occorre provare a dividerlo per tutti i numeri a lui inferiori, ma basta provare con i numeri primi inferiori o eguali alla sua  radice quadrata.

Per scomporre tutti i numeri primi fino a mille ce ne bastano dodici tra quelli  trovati poco fa,
1   2   3   5   7   11   13   17   19   23   29   31  …., anzi undici, perché 1 è ovvio. Se poi il numero è pari, naturalmente si arriva fino a 2000.
E poi  si vede subito se un numero è divisibile per 2,3,5,11.  Dunque ci restano sette numeri un po’ più spinosi, cioè 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31.
Con i venticinque primi da 1 a 100, poi,  si scompongono tutti i numeri fino a 10000 e i pari fino a 20000.

A che serve la scomposizione in fattori primi?
Anzitutto a trovare il massimo comun divisore di due o più numeri (prendendo solo i fattori primi comuni).
Per esempio i MCD di 484 e 312. Con l’algoritmo Euclideo ci si arriva in fretta. Con i fattori primi si trova che: $484 = 2^2 11^2$ e $312 = 2^3 3\ 13$.
Scrivendo per disteso invece di usare gli esponenti si trova subito il MCD, costituito da 2 fattori 2, cioè 4.
 484 = 2 × 2×11×11
312 = 2 ×2×2×3×13
Per ottenere il minimo comun multiplo, invece,  occorre includere tutti i fattori  primi, comuni e non comuni, ciascuno col massimo esponente. Moltiplicare 484 x 312 dà evidentemente un multiplo comune, ma non è il minimo, perché abbiamo contato due volte i due “rossi”, ovvero abbiamo contato due volte il massimo comun divisore. Per forza. Allora bisogna toglierne uno.
In pratica, il prodotto di due o più numeri diviso il MCD ci dà il loro minimo comun multiplo.

Una buona scomposizione in fattori ci dà (quasi) subito due informazioni: quanti divisori ha un numero e qual è la loro somma. Non ricordo che queste due divertenti applicazioni mi siano state insegnate a quel tempo.

Per quanto riguarda il **numero di divisori** vediamo per esempio $484= 2^2 11^2$.  I divisori sono:
1,2,4,11,22,44, 121,242,484
Sono nove divisori in tutto. E’ facile distrarsi e, per numeri grandi, uno o due fattori li manchiamo sicuro.
Ma come si procede razionalmente?
Per avere tutti i fattori “si moltiplicano tutte le possibili potenze di 2 per tutte le possibili potenze di 11”. La frase è corretta, ma bisogna capire quello che significa: se tra le potenze di 2 non includiamo $2^0 = 1$, usando solo 2 e $2^2$ , non avremo mai i divisori 11 e 121, che, sappiamo bene, dividono 484.  Similmente, se non includiamo $11^0$ , non otteniamo mai i divisori 2 e 4. Quindi le potenze possibili di 2 hanno esponenti 0,1,2 e analogamente quelle di 11 hanno esponenti 0,1,2.
Ciascuna delle tre potenze di 2 si combina con ciascuna delle tre potenze di 11. In tutto 3 x 3 = 9

combinazioni, che sono i nostri fattori, di cui il più piccolo è $2^0 11^0 = 1$ e il più grande è $2^2 11^2 =$ 484. Queste 3 potenze non sono altro che l'esponente della potenza più alta, 2 in entrambi i casi, a cui aggiungiamo 1, che rappresenta l'esponente zero.

In conclusione, se, scomponendo un numero N in fattori primi troviamo che esso può esser scritto $N = p_1^a\, p_2^b\, p_3^c\ldots$ abbiamo che il numero di divisori è semplicemente
Numero divisori = $(a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots$
indipendentemente dai numeri primi in gioco.
Ad esempio, 144 ha 15 divisori. Provate a verificare.

La **somma dei divisori,** che la scomposizione in fattori primi rende pure possibile, è un esercizio anche più interessante.
Consideriamo il numero $N = p_1^a\, p_2^b\, p_3^c\ldots$
Il prodotto: $(p_1^0 + p_1^1 + p_1^2\ldots+p_1^a)\,(p_2^0 + p_2^1 + p_2^2\ldots+p_2^b)\,(p_3^0 + p_3^1 + p_3^2\ldots+p_3^c)$ è proprio la somma di tutti i divisori. Infatti, svolgendolo, abbiamo una somma di termini tutti composti da tanti fattori quante sono le parentesi, ciascuno dei quali è scelto da una parentesi diversa. Questi termini sono appunto i vari divisori. Ad esempio, il divisore 1 lo si trova prendendo sempre il primo termine in tutte le parentesi. Dato che ogni divisore è costruito di prodotti i cui fattori sono un termine per ogni parentesi, non ci possono essere ripetizioni.

Per esempio, per il nostro vecchio 484, i cui divisori sono 1, 2, 4, 11, 22, 44, 121, 242,484 come già sappiamo, il prodotto che ci dà la somma dei divisori è:
(1 + 2 +4)(1 + 11+ 121) = ( procedendo ordinatamente) =
(1 + 11 +121)+(2 + 22 + 242) +(4+ 44 +484).
Intanto vediamo che ci sono tutti i nove divisori, ciascuno una volta sola.
E la somma, dobbiamo proprio farla brutalmente? Se il numero fosse $2^{14} 11^8$ avremmo 135 divisori e ci sarebbe da ridere.
Ma noi sappiamo da un pezzo che

$$1 + k + k^2 + k^3 \ldots. + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

E quindi ogni parentesi, per esempio in (1 + 2 +4)(1 + 11+ 121), è data da un termine del tipo

$$\frac{{p_i}^{n+1} - 1}{p_i - 1}$$

Quindi, per 484 abbiamo che

$$Somma\ dei\ divisori = \frac{(2^3 - 1)(11^3 - 1)}{(2 - 1)(11 - 1)} = 931$$

Magico! Se verificate, trovate che è proprio vero.

A questo punto si potrebbe entrare in un giardino nell'immenso paese della matematica, un giardino che ha i suoi cultori.

Un numero N è detto “perfetto” se la somma dei suoi divisori è eguale a 2N. O, se dalla somma dei divisori escludiamo per convenzione il numero N, il divisore più grande, “un numero N è perfetto se la somma dei suoi divisori è eguale ad N”. Il più piccolo numero perfetto – a parte il solito 1, è 6. Il terzo è 28.
Due numeri sono detti “amici” se uno è la somma dei divisori dell’altro. Procedendo su questa strada troveremmo altre varietà di numeri.

Ma c’è subito anche qui una stranezza: non si conoscono (a parte 1) numeri perfetti dispari, anche se non c’è nessuna dimostrazione matematica che numeri perfetti dispari non possano esistere. Un numero perfetto dispari dovrebbe avere molte interessanti proprietà. Ad ogni modo, procedendo per forza bruta con opportuni calcolatori, si sa con certezza che nessun numero dispari minore di $10^{300}$ , cioè 1 seguito da 300 zeri, è perfetto. E siamo nel 2010.

## XXX.  IL PICCOLO GIGANTE

Pierre Fermat

Il "piccolo teorema di Fermat" è un semplice teorema che permette quasi incredibili calcoli di un tipo speciale.

Pierre Fermat era un avvocato/magistrato Francese del Seicento che fece il seguente ragionamento.

Prendiamo due numeri, un numero primo $p$ e un numero $a$ che sia primo con $p$ (che cioè non è divisibile per $p$). Per andar sul sicuro, noi prendiamo due numeri primi, per esempio 7 e 5. Come noi sappiamo,  dividendo un  numero per sette abbiamo sei resti possibili, cioè  tutti i numeri più piccoli di sette.

Adesso prendiamo 5 e dividiamo per sette, otteniamo resto **5**.
Prendiamo 2 x5 e dividiamo per sette, otteniamo resto **3**.
Prendiamo 3x5 e dividiamo per sette, resto **1**
Prendiamo 4x5 dividiamo per 7, resto **6**
Prendiamo 5x5, dividiamo per sette, resto **4**
Prendiamo 6x5, dividiamo per sette, resto **2**.

In altre parole abbiamo moltiplicato 5 per i sei numeri  più piccoli di sette, che sono tutti  primi con sette, che è un numero primo. Il numero 7 non divide 5 e non divide nessuno dei numeri che moltiplicano 5, per cui nessuno dei prodotti ( 1 x 5, 2 x 5, 3 x 5….) è divisibile per 7. Tutti i prodotti lasciano un resto. Infatti 7 non può dividere per esempio 4 x 5, perché se un numero primo divide il prodotto di due fattori, o divide l'uno o divide l'altro.

Nel nostro caso abbiamo trovato tutti  i  sei  resti possibili della divisione per sette in un qualche ordine particolare  (5,3,1,6,4,2) , ma il loro prodotto è uguale a  1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6.
Abbiamo quindi l'eguaglianza:
R7 ($5^6$ x 1x2x3x4x5x6)= 1x2x3x4x5x6.

**Ma sappiamo che il resto del prodotto è eguale al prodotto dei resti. Quindi, chiamando R7**

**il resto della divisione per 7 di ambo i membri:**

R7 ($5^6$)× R7 (1x2x3x4x5x6) =R7(1x2x3x4x5x6)
Semplificando: R7 ($5^6$)=1
O anche R7 ($5^6$-1)=0

Questo è il nostro gigante.
Ci dice che, dati due numeri primi fra loro *a* e *p*, il resto della divisione per p di $a^{(p-1)}$ è 1. O anche: il numero $a^{(p-1)} - 1$ è divisibile per *p*. Non si scappa.

Dato che lo abbiamo dimostrato solo per due numeri specifici, 5 e 7, questa non può essere considerata una dimostrazione. Tuttavia, quel che abbiamo fatto è molto simile ad una dimostrazione, perché può essere ripetuto per qualsiasi coppia di numeri primi. Se siete forti a usare lettere invece di numeri, dopo qualche esercizio potete forse trovare da soli una dimostrazione per due numeri qualsiasi *a* e *p*, di cui non occorre che *a* sia primo, solo che sia primo con *p, che invece è primo*.

La dimostrazione incomincia così: dati *a* e *p*, si prendono i prodotti di *a* per i numeri primi con *p*, più piccoli di *p*, che sono tutti i *p-1* numeri più piccoli di *p*, dato che quest'ultimo è primo. Ogni prodotto *a, 2a,3a, …(p-1)a* viene diviso per *p*. Da ciascuna di queste *(p-1)* divisioni viene un resto (nessuno dei due fattori del prodotto è divisibile per p). Ma tutti i *(p-1)* resti sono differenti. Perché?
Supponiamo che dalla divisione per *p* di *m·a* e di *n·a* risultino due resti eguali.
Questo vorrebbe dire che *(m-n)a* diviso *p* dà resto zero. E quindi, dato che *m-n* è più piccolo di *p*, *p* divide *a*, poiché un numero che divide un prodotto di due fattori, o divide l'uno o divide l'altro. Ma *p* ed *a* dovevano essere primi fra loro e quindi l'ipotesi che due resti siano eguali è impossibile.
A questo punto continuate voi.

Per verificare il teorema avete bisogno di calcolatori potenti o programmi speciali, altrimenti non andate lontano, perché il resto di una divisione dipende criticamente dall'ultima cifra del dividendo e i calcolatori di rado prendono più di venti cifre.
Prendiamo un numero relativamente piccolo, per esempio 10, ed uno più grande, 113. Noi sappiamo che il resto della divisione di $10^{112}$ per 113 è uno. Ora, $10^{112}$ ha 122 cifre. Non è mica uno scherzo!

Il lettore attento può chiedersi: perché i numeri devono essere primi fra loro?
Per esempio nella coppia 3 e 6, 3 è primo come deve essere, ma 3 e 6 non sono primi fra loro. E' ancora vero che $6^2$ diviso 3 dà resto 1? No. Che cosa è successo?
Vediamo i resti di 6x1, 6x2, diviso 3: sono 0,0. Non sono 1,2 (= p-1) come era per 7. Quindi alla fine non possiamo semplificare i due prodotti 0,0 e 1,2.
In realtà la comparsa dello zero è quello che ci dice che il teorema non viene del tutto invalidato. In matematica non si può dividere per zero. Punto.

Una volta, in Giappone, chiesi ad un anziano professore: secondo Lei, quanti Giapponesi possono dimostrare sui due piedi il piccolo teorema di Fermat? Lui mi rispose: forse mille (uno su centoventimila Giapponesi). Io credo che fossero molti di più. Ma mi piacerebbe contribuire

ad aumentare il numero di persone che ha almeno un'idea di questo notevolissimo teorema.

## XXXI. ANCORA NUMERI PRIMI.

Abbiamo già incontrato i numeri primi. Sceltone uno a caso, che chiameremo per esempio p, già sappiamo che i suoi divisori sono soltanto 1 e p.
Due numeri, poi, sono **primi fra loro** se il loro unico divisore comune è 1.

Un facile problema: Dato un numero primo p, quanti sono i numeri inferiori o eguali a p e primi con p?
La risposta è semplice, sono tutti i numeri da 1 a p-1, incluso 1 (perché l'unico divisore comune tra p e 1 è 1). Del resto è evidente che tutti i numeri più piccoli del numero primo p devono essere primi con p: se un numero x avesse un divisore comune con p, mettiamo y, vorrebbe dire che y divide sia x che p, che quindi non sarebbe più primo.

Se un numero N non è primo, è convenzione da duecent'anni chiamare Φ (pronuncia "fi") il numero dei numeri che con esso sono primi. Questo numero Φ, che dipende da N, e quindi scriviamo Φ(N), fu introdotto da Eulero ed ha delle interessanti proprietà.

A me interessa trovare una formula per Φ(N) che sia un po' più sottile del metodo di contare semplicemente i numeri primi con N..
Un primo risultato lo abbiamo già, ed è che la Φ(p), dove p è qualsiasi numero primo, è sempre eguale a p-1.

Il secondo caso è un po' più complicata: supponiamo che N sia il prodotto di due e solo due numeri primi, per esempio 15, che è il prodotto di 3 x 5. Quanto vale Φ(15)?

Se raccogliamo le idee, non è difficile fare il calcolo.
Intanto, possiamo semplicemente esaminare tutti i numeri da 1 a 15 e vedere quali sono quelli primi con 15, cioè che non hanno divisori comuni con 15.
15 è un numero abbastanza piccolo, e la selezione può esser fatta a mano.

**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15**

Sono in tutto 8 numeri rossi. Ma possiamo arrivarci col ragionamento?

E' più facile trovare i numeri non primi con 15 e più piccoli di 15 che non i numeri primi. Ma il numero totale, numeri primi più numeri non primi, deve essere 15. Quindi il numero dei numeri primi con 15 e minori di 15 (cioè fino a 14) è dato da

15 – (numero di numeri non primi con 15).

I numeri divisibili per 3 (evidenziati in azzurro) sono i multipli di 3 eguali o inferiori a 15. E questi sono cinque, 3 x1, 3 x 2, 3x 3, 3 x 4, 3 x 5 cioè 3, 6, 9, 12, 15. Notiamo che: 5 = 15/3.
I numeri divisibili per 5 (evidenziati in rosa) sono i multipli di 5 inferiori o eguali a 15, e questi sono 3, cioè 5x1 e 5x2, 5 x 3, cioè 5, 10, 15. Notiamo che 3 = 15/5.
In tutto i numeri non primi con 15 sono 8. Ma 15 lo abbiamo contato due volte, come multiplo di 3 e come multiplo di 5, e quindi i numeri non primi con 15 sono solo sette. Il numero dei numeri primi con 15 è quindi dato da 15 -7 =8.

**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15**

**Vedete quindi se riuscite ad arrivare a questa formula: i numeri primi con 3 x 5 inferiori o eguali a 15 sono**
**15- 15/3 -15/5 + 15/(3·5) = 15-3-5+1 = 3(5-1) - (5-1) = (3-1)(5-1)**

**Ragioniamo in altro modo:**

Anzitutto, dato 15, sappiamo che esso ha due divisori primi, 3 e 5. Quindi ci sono 15/3 =5 numeri che sono multipli di 3. Infatti, dividendo 15 per 3 , noi dividiamo i numeri inferiori a 15 in tre gruppi di cinque numeri, cioè quelli divisibili per 3, quelli che divisi per 3 danno resto 1, quelli che divisi per tre danno resto due. I primi bisogna toglierli, perché sono divisibili per 3 come 15.
Dai restanti numeri, che sono in tutto 15 -15/3 = 10, dobbiamo togliere quelli che sono divisibili per cinque, che sono 10/5 =2. Totale, ne restano 8.
Siccome 15 non ha altri fattori primi, il processo si ferma qui.

Come vediamo dall'elenco dei numeri da 1 a 15, ci sarebbe un terzo numero divisibile per 5, cioè proprio 15, ma questo l'abbiamo già tolto tra quelli divisbili per 3.

Ponendo 15 = N, p = 3, q = 5, vediamo che abbiamo fatto il seguente calcolo.
***Primo passo***, togliere da N i numeri divisibili per 3, che chiameremo *p*:

$$N - \frac{N}{p}$$

Nel nostro caso, 15-15/3 = 10, quanto ci resta.
***Secondo passo***: calcolare tra questi numeri restanti quanti sono i numeri divisibili per 5, che chiameremo *q*:

$$\frac{N - \frac{N}{p}}{q} = \frac{N}{q} - \frac{N}{pq}$$

Nel nostro caso l'operazione era (15-5)/5 = 15/5-15/15 = 2.
Qui qualcuno può chiedersi se sia sicuro che (N - N/p) sia divisibile per q. E' sicuro, perché N lo è e N/p lo è, essendo in questo caso eguale a q. Ma lo sarebbe anche in altri casi più complessi che vedremo più sotto, in cui N comprende il fattore $q^a$, perché dividendo N per p tutte le potenze di q sono comunque restate in N.

***Terzo passo,*** togliere da N tanto i numeri divisibili per p, quanto quelli divisibili per q tra i restanti:

$$\Phi(N) = N - \frac{N}{p} - \left(\frac{N}{q} - \frac{N}{pq}\right) = N - \frac{N}{P} - \frac{N}{q} + \frac{N}{pq} = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

Nel nostro caso, abbiamo fatto 10-2 =8 = 15-15/3-15/5 -15/15 = 15 (1-1/3)(1-1/5).
Questa formula è sempre valida, purché si tratti di divisori primi differenti. Poco importa se

compaiano elevati a qualche potenza nella scomposizione in fattori primi.

Intanto vi sarà naturale studiare alcuni casi particolare della formula, che afferma che il numero dei numeri primi con *pq*, dove p e q sonop entrambi primi, cioè *Φ(pq)*, è dato da:

$$\Phi(N = pq) = N - \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + \frac{N}{pq} = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1)$$

Se conosciamo due numeri primi, per esempio 31 e 19, sappiamo a colpo sicuro che il numero di numeri primi con il loro prodotto, che vale 589, è 540 (= 30 x 18). Cioè:

$$\Phi(589) = 540.$$

Non è affatto un risultato banale: ci vuole un bel po' di tempo per trovarlo in altro modo.
Inoltre questo risultato ci suggerisce che la Φ di un prodotto di due numeri qualsiasi è data dal prodotto delle loro Φ parziali.

Qualcuno potrebbe osservare che allora abbiamo uno strumento che ci permette di calcolare $\Phi(p^2)$. Infatti avremmo facilmente $\Phi(p^2) = \Phi(p \times p) = (p-1)(p-1) = p^2-2p+1$.

E' un buon tentativo, ma il problema è che i due numeri primi in $p^2$ sono eguali, ed anche i loro multipli primi con $p^2$ sono gli stessi. I numeri non primi con $p^2$ saranno quindi di più di $(p-1)^2$.
Vediamo, per esempio con $5^2=25$. :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Se vediamo il conto troviamo che, da 1 a 25 ci sono:

$\Phi(5^2)$ = N-N/5 = 25-5 numeri primi con 25.

In generale, vale:

$$\Phi(p^a) = (p^a - p^{a-1}) = p^a - \frac{p^a}{p} = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right), che\ \text{è}\ sempre\ N - \frac{N}{p}$$

Guardiamo la collezione di formule che abbiamo già trovato:

1. $\Phi(N = p) = N - \frac{N}{p} = p - 1 = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)$
2. $\Phi(N = p^a) = N - \frac{N}{p} = p^a - p = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Dunque gli esponenti non contano nell'espressione finale in quanto l'espressione $N\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ è la stessa tanto per $\Phi(N = p)$ quanto per $\Phi(N = p^a)$ . Nel primo caso, però, N = p, mentre nel secondo, $N=p^a$.

3. $\Phi(N = pq) = N - \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + \frac{N}{pq} = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) =$
   $N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$

Ma nel caso 3. supponiamo ora che N abbia un terzo fattore primo, per esempio r. Alla Φ(N) che abbiamo ottenuta va ancora sottratto, tra i numeri rimasti, il numero di questi ultimi divisibili per r, che vale:

$$\frac{N-\frac{N}{q}-\frac{N}{p}+\frac{N}{pq}}{r}=\frac{N}{r}-\frac{N}{qr}-\frac{N}{pr}+\frac{N}{pqr}$$

Questo gruppetto va sottratto a quello che avevamo già, che era: $N-\frac{N}{q}-\frac{N}{p}+\frac{N}{pq}$

In generale:

4. $\Phi(p^a q^b r^c) = N-\frac{N}{p}-\frac{N}{q}+\frac{N}{pq}-\left(\frac{N}{r}-\frac{N}{qr}-\frac{N}{pr}+\frac{N}{pqr}\right) = N-\frac{N}{p}-\frac{N}{q}-\frac{N}{r}+\frac{N}{pq}+\frac{N}{pr}+\frac{N}{qr}-\frac{N}{pqr} = N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)$

Con non troppa fantasia si può immaginare la formula generale

$$\Phi(p^a q^b r^c \dots) = N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\dots$$

la quale permette di calcolare quasi immediatamente la $\Phi$ di qualsiasi N di cui si conosca la scomposizione in fattori primi.

**Notate che sapendo tutto questo potete facilmente procedere a memoria una volta che sapete che un numero N, per esempio 60, è dato da $2^2 3\cdot 5$. Si procede così, infischiandosi delle potenze:**
**60/2 = 30. Tenere 60 – 30 = 30.**
**30/3= 10, tenere 30-10 =20**
**20/5=4, tenere 20-4 =16. Questa è la nostra Φ(60). Per esempio, suggerirei di completare la tavola (che è completa su Wikipedia inglese, alla voce "Euler's totient function").**

| | +0 | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 | +8 | +9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0+ | | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 4 | 6 |
| 10+ | 4 | 10 | 4 | 12 | 6 | 8 | 8 | 16 | 6 | 8 |
| 20+ | 8 | 12 | 10 | 22 | 8 | 20 | 12 | 18 | 12 | 28 |
| 30+ | 8 | 30 | 16 | 20 | 16 | 24 | 12 | 36 | 18 | 24 |
| 40 ++ | | | | | | | | | | |
| 80+ | 32 | 54 | 40 | 82 | 24 | 64 | 42 | 56 | 40 | 88 |
| 90+ | 24 | 72 | 44 | 60 | 46 | 72 | 32 | 96 | 42 | 60 |

Per esempio $\Phi(80= 2^4 5) = 80 (1-1/2)(1-1/5)=32$. O, anche più rapidamente, 80/2=40, tenere 80-40= 40, 40/5=8, tenere 40-8 = 32.

**XXXII. IL PICCOLO GIGANTE RIVISITATO.**

Siccome sappiamo che, dati p e a primi,

$a^{p-1} = 1$, modulo p

si potrebbe congetturare che p-1 non sia altro che la Φ(p) per il numero primo p e che la formula generale per il piccolo Teorema di Fermat sia precisamente

$a^{\Phi(n)} = 1$, modulo n, valida anche se n non è primo, purché a ed n siano primi fra loro.

Verifichiamo con qualche numero, ciò che in teoria dei numeri non funziona (quasi) mai, nel senso che illude (quasi) sempre.

| a | n | Φ (n) | $a^{\Phi\ (n)}$ | Resto della divisione di $a^{\Phi\ (n)} - 1$ per n |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 6 | 64 | 63/9 = 7, resto 0 |
| 3 | 4 | 2 | 9 | 8/4 = 2, resto 0 |
| 11 | 12 | 4 | 14641 | 14640/12 = 1220, resto 0 |
| 13 | 18 | 6 | 4826809 | 4826808/18 = 268156, resto 0 |

Questo però è uno dei pochi casi in cui da una'osservazione "sperimentale" tiriamo fuori una congettura corretta.

Che però non è impossibile da dimostrare.

Supponiamo dunque che *n* non sia un numero primo, ma valga 12. Tuttavia *a* e *n* devono restare primi fra loro, come abbiamo visto, per evitare che compaiano degli zeri nel prodotto. Come *a* scegliamo 5.
La Φ (12) vale 4, e infatti i numeri primi con 12 sono quattro, cioè **1, 5, 7, 11.**
Moltiplichiamo 5 per i quattro numeri primi con 12, e troviamo 5,25,35,55.
I resti della divisione per 12 di ciascuno di questi quattro numeri sono **5,1,11, 7**. Di nuovo, i resti sono i numeri primi con 12, mescolati tra loro. Di nuovo possiamo procedere come per la nostra (quasi) dimostrazione del piccolo teorema di Fermat.
Possiamo cioè fare i prodotti e di nuovo possiamo semplificare, trovando che $5^4$-1, cioè $5^{\Phi(12)}$ - 1, è divisibile per 12, cioè che 624 è divisibile per 12 (ed infatti dà 52 con resto zero). Che due resti non possano coincidere lo abbiamo fatto vedere in precedenza.

Dividendo un multiplo qualunque di 5 per 12 si possono trovare dei resti diversi da questi quattro, cioè non primi con 12. Per esempio 5 × 4 diviso 12 dà resto 8.
E' chiaro quindi che il colpo di genio nella dimostrazione di questo teorema sta nel rendersi conto che moltiplicando un numero *a* che sia primo con *n* per i numeri primi con *n* (e più piccoli di *n*) dà dei numeri che, divisi per *n*, producono dei resti che sono numeri più piccoli di *n* e primi con *n*. **Cioè questi resti fanno necessariamente parte del club dei Φ (*n*) numeri che rappresentano la totalità dei numeri più piccoli di *n* e primi con *n*.**

Per convincervene potete provare a mettere 7 o 35 (che sono primi con 12) al posto di 5 e trovare i resti delle divisioni di 7, 35, 49, 77 per 12 o di 35, 175, 245, 385 per 12. Non uscirete mai dal club (1,5,7,11) dato in qualche ordine.
Ma perché?
Se a × m (dove m è primo con n) diviso n non desse come resto un numero primo con n, vorrebbe dire che potremmo scrivere che tanto il resto R quanto n sono multipli di uno stesso divisore q, cioè R = r×q e n = s×q. Quindi:

$$a\times m = k\times n+r\times q, \text{ in cui } n = s\times q.$$

$$a\times m = (k\times s + r)\times q = A\times q.$$

Se possiamo scrivere questa espressione, ne risulta che q deve avere dei divisori comuni o con a o con m. Se volete, questo lo si dimostra esprimendo a×m e A×q in fattori primi. La scomposizione deve essere la stessa.
Ma *q* non può aver divisori comuni con *m*, il quale è primo con *n*, cioè non ha divisori comuni con *n*. Quindi *q* deve avere divisori comuni con *a*. Ma poiché abbiamo assunto che *q* divida anche *n*, ne risulterebbe l'assurdo che *a* ed *n* non sono primi fra loro, come invece li avevamo scelti fin dall'inizio. Quindi non si può avere un resto di $a\times m$ (con m primo con n) che non sia primo con *n*.

Una prima conseguenza è che se un numero n è il prodotto di due numeri primi n = pq, allora:

$a^{(p-1)(q-1)} = 1$ modulo pq.

perché sappiamo che Φ(pq) = (p-1)(q-1). E dalla formula generale per la Φ si ottiene la forma esplicita del teorema per qualsiasi numero si voglia.

## XXXIII. ALTRE BASI

Avevamo detto che, per esempio

**Ogni numero con cifre ABCD vuol dire in pratica 1000 A+100 B+10 C+D.**

Ma questo vale solo in base 10. L’uso di una base per esprimere un numero è una notevolissima invenzione, che va indietro forse 5000 anni. Altrimenti fare i conti sarebbe stata un’impresa. Certo era assurdo inventare sempre nuovi simboli per indicare nuovi numeri, e poi creare delle tavole di addizione e di moltiplicazione sempre più estese. Al limite sarebbe stato più comodo esprimere i numeri con tanti pallini o stanghette e fare le operazioni direttamente su di loro.

**| = 1, |||| = 4, ||||||||| =9.** Per 11 avremmo dovuto inventare un simbolo nuovo, per esempio ||||||||||| =◊

E’ più facile, per fare ◊ - 3, togliere tre stanghette da undici stanghette e contare quante ce ne restano, piuttosto che ricordare che ◊ - 3 fa 8.

Invece di inventare un nuovo simbolo per ogni numero, si può anche pensare di fare come per le monete, cioè introdurre dei tagli sempre maggiori. I Romani avevano un sistema che usava unità sempre maggiori. In Euro, come abbiamo visto, si possono dare a una persona 400 Euro in quattro banconote da cento, oppure otto da cinquanta, oppure varie altre combinazioni, fino a 40000 centesimi di Euro. I Romani avevano un sistema affine, in cui, per esempio, 1668 era espresso in “monete” di taglio decrescente: MDCLXVIII. Le divisioni le facevano come abbiamo spiegato. Invece le moltiplicazioni di numeri grandi risultavano più complesse.
Per esempio 3300 era MMMCCC.

La formuletta "ABCD" = 1000A + 100B + 10 C + D può essere riscritta come
"ABCD" = D+10(C+10(B+10A)) = 10(10(10(10A+B) +C)+ D da cui si vede che l'ultima cifra del nostro numero, D, è il resto della divisione per 10 del numero stesso. Il quoziente
C+ 10 (B+10A) viene nuovamente diviso per 10, ed i resto è C, penultima cifra. Ci resta B+10A. Dividendo ancora per 10, il resto è B, e finalmente A è l'ultimo quoziente.

Per comodità i numeri per cui vanno moltiplicati A, B, C etc. sono potenze di 10, ma abbiamo già visto che non è necessario. Per esempio, quasi nessuna moneta nazionale usa una base veramente decimale. Vediamo per esempio gli Euro.

| 500 | 200 | 100 | 50 | 20 | 10 | 5 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 1 |

Una somma di una banconota da 100 Euro + 1 banconota da 50 + due banconote da 20, più 3 da 10, più una da 5, più una moneta da 1 Euro potrebbe essere scritta in notazione Euro come 1123101. Totale, 166 Euro. Da dove viene quello zero? Dal fatto che non ho indicato monete da 2 euro, e noi dobbiamo aver posto per tutte le denominazioni. E si potrebbe ancora continuare con le monete da 50 centesimi, 20 centesimi, 10 centesimi, 5 centesimi, 2 centesimi, 1 centesimo. Dovremmo fare delle complicate tabelle di addizione, moltiplicazione e divisione del tutto dementi, ma non sarebbe impossibile farlo. Invece i Romani con il loro sistema avrebbero fatto un pasticcio colossale perché avendo il numero 8 come VIII, cioè:

non avevano modo di esprimere il 3 se non come III. Ma questo, in notazione posizionale, significa 1 da I, 1 da V, e 1 da X, cioè 16.

Se dunque passiamo ad una base razionale, non questi Euro (e soprattutto non il metodo Romano), le varie cifre si intendono ciascuna moltiplicata per una opportuna potenza della base.

A destra della virgola, poi, ogni cifra si suppone moltiplicata per le potenze dell'inverso della base – che, vedremo più avanti, possono essere espresse come potenze negarive.
Quindi in base decimale

**"ABCD,abcd" = 1000A+100B+ 10 C + D+ a/10 + b/100+c/1000 etc.**

In base binaria sarebbe   8A + 4B +2C+D + a/2 + b/4 + c/8 etc.
In base 7, sarebbe   343 A + 49B +7C + D + a/7 + b/49 + c/343

E in questa base 7, per trovare A, B, C, D dovremmo dividere "ABCD" per 7   e scrivere il resto D, poi dividere il quoziente per 7  e scrivere il resto C, poi dividere il quoziente per 7 e scrivere il resto B.  Queste progressive divisioni per sette possono naturalmente continuare se il numero è molto grande, finché non troviamo un quoziente minore di 7..

Di tutte le basi, la più utile è quella decimale, la più interessante è quella binaria. Dato che, dividendo per due, i resti possono solo essere 1 o 0, è facile scriverci una tabella di addizioni e moltiplicazioni, con cui i nostri calcoli diventano facilissimi:

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **10** |

← (così si scrive 2 in sistema binario)

Con questa tabella di addizione possiamo scriverci tutti i numeri uno dietro l'altro aggiungendo sempre 1.
Abbiamo così:

**0 1 10** (=1+1), **11, 100** (=11+1 con riporti), **101, 110, 111, 1000** eccetera.
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Secondo me, un buon test della comprensione dell'addizione sarà se vi cimentate con le sottrazioni. Per esempio provate 10100 – 1101 (e magari verificate trasformando minuendo, sottraendo e risultato in numeri decimali).

In quanto alla moltiplicazione, la tabella è ancora più semplice. Eccola:

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **1** |

Vediamo una moltiplicazione difficile: 11 x 11
Procediamo come nelle ordinarie moltiplicazioni:

```
  11 x
  11
--------
  11
 11
 -------
1001
```

Naturalmente avrete tenuto conto dei riporti dove necessario.

Tornano i conti?

Per sapere a che numero corrisponde 11 possiamo andare a vedere l'elenco che abbiamo scritto più sopra, oppure possiamo ricordare che "11" binario = 2 x1 +1 cioè 3.
Invece 1001 = 1 x 8 + 0 x 4 + 0 x 2 + 1 = 9. Abbiamo insomma riscoperto che 3 x 3 =9.

La divisione è un altro affare. Operazione trascurata in tutte le basi. Qui è facile perché un numero grande diviso uno piccolo dà 1 e uno piccolo diviso uno più grande dà 0. Poi si sottrae.

Proviamo 1010 diviso 101
Vediamo subito che dà 10. Abbiamo trovato che 10 decimale diviso 5 decimale dà 2.

Proviamo 1 diviso 11

```
1      | 11
00     |-------
10     |  0.01
00
----
100
 11
-----
   1
```

Adesso siamo da capo e quindi il nostro numero è periodico con periodo 01: 0.01010101…

Ricordiamo che 0.01010101 significa $0 \times ½+1 \times ¼ + 0 \times 1/8 + 1\times1/16…$
Se vogliamo, abbiamo trovato un risultato non banale, che 1/3 = 1/4+ 1/16+1/64...

E' vero?

La nostra vecchia serie geometrica darebbe

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}, \text{cioè } \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Sorpresa, anche 1/5 nel sistema binario è periodico. Come sappiamo in base 2, 5 vale 101.

1/101 = 0.001100110011….

Il risultato, di nuovo non banale, è che $1/5 = 3/16+3/256+ 3/4096…. = 3 (1/16 + 1/16^2+1/16^3…)$
La serie è ora 3/16 (1/(1-1/16)) = 3/16 x 16/15 = 1/5. Pensa un po'.

Andiamo in cose più difficili.
La radice quadrata di 2, quanto vale in binario?

Usiamo il nostro metodo:
2 in sistema binario vale 10. Non abbiamo scelta, il nostro primo tentativo può solo essere o 1 o 10. Proviamo con 1, iterazione di ordine zero.
Prima iterazione:

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{10}{1}\right) = 1.1$$

Incidentalmente questa prima iterazione in base 10 vale 1 + ½=1.5.

Seconda iterazione:

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left(1.1+\frac{10}{1.1}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{10.01+10}{1.1}\right)=\left(\frac{100.01}{11}\right)=1.0110101101\ldots$$

Questo numero vale 1+3/8+1/32+1/128 +1/512+1/2048..= 1.4165, non troppo lontano da 1.4142., che in formato binario è 1.0110101000001001etc.

E pigreco in binario? Cari amici, pensateci un poco.

Ma voi potete scrivere 3.1418  come 3 (che in binario è 11) + 1/10+4/100+1/1000+ 8/10000. Poi sostituite i vari termini: 10 è 1010 (come potete subito verificare sommando 2 + 8 = 10 +1000 in binario), 100 = 10x10, che in binario diventa 1010 x 1010 eccetera. Poi fate le divisioni e moltiplicazioni e buon divertimento.
Vi aiuto dandovi i primi risultati:

0.1 = 1/10 (binario) =0.00011001100110011001101
0.04 = 4/100 (binario = 0.00001010001111010111000 1

La risposta, se ci riuscite, è:

π = 11.00100100001111110110101010001000100001011010001100001000110100011000...

O potete anche usare la serie di Gregory, naturalmente scritta in binario, ma converge così lentamente!

Gli Egiziani avevano trovato una buona approssimazione per pigreco, che valeva 22/7 = 3.142. Provate magari a fare la divisione in binario e vedere se il risultato nelle sue prime cifre assomiglia a quello dato.

Ci provo anch'io, ma se avete coraggio dovete provarci da soli:

22 in binario è 10110, 7 è 111.

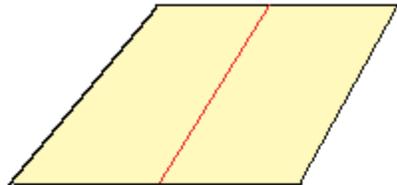
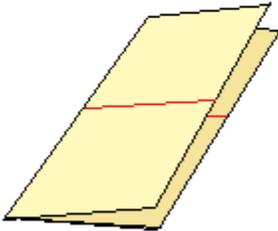
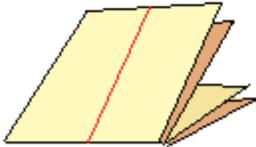
```
10110            111
 111             11.001
 1000
  111
    1000
     111
       1
```

Dato che siamo tornati a 1/111, vediamo che anche qui il numero è periodico e possiamo scrivere che l'approssimazione "egiziana" di pigreco in base 2 è  11.001001001001, che differisce dal numero dato sopra a partire dalla  nona cifra decimale. Fermandoci alla 10 cifra decimale, il risultato egiziano è 3 + 1/8 +1/64 = 3.140625, che non è male, neanche in base 2.

Posso solo aggiungere che se sapete fare tutte queste cose avete del talento.

## XXXIV. LA MACCHINA PER FARE LE MOLTIPLICAZIONI.

E adesso costruiamo una macchina per fare le moltiplicazioni. Un tempo gli ingegneri si distinguevano dagli altri mortali perché avevano sempre in tasca un piccolo strumento per fare moltiplicazioni anche complicate. Io ricordo che ci volle del bello e del buono per convincermi che non si trattava di un gioco di prestigio con un trucco. Il bello del regolo, notai, era che dava correttamente l'ordine di grandezza senza occuparsi delle ultime cifre del risultato. Qui abbiamo una bella differenza tra molti problemi che abbiamo visto finora in cui ci occorre l'ultima cifra di numeri anche enormi (altrimenti non si può parlare di resti), e i problemi pratici in cui ci importano le prime due o tre cifre.

Ci può aiutare risolvere un piccolo problema.
Supponiamo di avere un foglio di carta spesso un decimo di millimetro. Lo pieghiamo 50 volte (ogni volta raddoppiando lo spessore). Che spessore raggiungiamo?

Facciamoci una tabella, usando o un calcolatore elettronico o i regoli di Nepero, o semplicemente a mano

numero di pieghe spessore in decimi di millimetri
1 2

| | |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |

Ferma un momento. E zero pieghe? Bé, zero pieghe ci dà spessore 1. Daccapo.

| numero di pieghe | spessore in decimi di millimetro |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |

Dunque, con dieci pieghe siamo già a 1000 decimi di millimetro, 10 cm. Non sembra ancora molto. Ma qualcuno può già incominciare a preoccuparsi: ogni 10 pieghe il risultato viene moltiplicato per circa mille..... Che succederà con 50 pieghe?

Rifacciamo:

| numero di pieghe | spessore in decimi di millimetro |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |
| 12 | 4096 |
| 13 | 8192 |
| 14 | 16384 |
| 15 | 32768 |
| 16 | 65536 |
| 17 | 131072 |
| 18 | 262144 |
| 19 | 524288 |
| 20 | 1048576 |

| | |
|---|---|
| 21 | 2097152 |
| 22 | 4194304 |
| 23 | 8388608 |
| 24 | 16777216 |
| 25 | 33554432 |
| 26 | 67108864 |
| 27 | 134217728 |
| 28 | 268435456 |
| 29 | 536870912 |
| 30 | 1073741824 |
| 31 | 2147483648 |
| 32 | 4294967296 |
| 33 | 8589934592 |
| 34 | 17179869184 |
| 35 | 34359738368 |
| 36 | 68719476736 |
| 37 | 137438953472 |
| 38 | 274877906944 |
| 39 | 549755813888 |
| 40 | 1099511627776 |
| 41 | 2199023255552 |
| 42 | 4398046511104 |
| 43 | 8796093022208 |
| 44 | 17592186044416 |
| 45 | 35184372088832 |
| 46 | 70368744177664 |
| 47 | 140737488355328 |
| 48 | 281474976710656 |
| 49 | 562949953421312 |
| 50 | 1125899906842624 |

Tutto ciò lo si fa se si ha un po' di pazienza e si sa moltiplicare per due, senza perderci di coraggio davanti ai grandi numeri che ci ritroviamo.

Quelli che hanno spirito di osservazione noteranno qualche aria di famiglia tra le prime cifre dei numeri da 1 a 10 e quelli 20 a 30, una somiglianza che si vede ancora, un po' meno chiara, tra 30 e 40, tra 40 e 50. Inoltre vedrebbe che in pratica tra due numeri i cui numeri d'ordine differiscono di dieci il rapporto è un po' più di 1000. Ora vedete lo sterminato numero che risulta alla fine. Piegando 50 volte un foglio di carta spesso un decimo di millimetro (sempre raddoppiando) si arriva a 1 125 899 906 842 624 decimi di millimetro.
(Google vi dà i numeri esatti almeno fino a $2^{40}$. Poi incomincia a dare numeri approssimati).

Chi aveva osservato che con 10 pieghe si hanno 1000 decimi di millimetro avrebbe potuto notare che se il foglio iniziale fosse stato spesso un metro, lo spessore dopo dieci pieghe sarebbe stato 1024 metri. In altre parole, non importa quale sia il numero di partenza, un decimo di millimetro o un metro, piegando dieci volte si moltiplica lo spessore per mille.

A questo punto vediamo che mettendo come spessore iniziale 1024 decimi di millimetro, piegando dieci volte troveremmo 1024 x 1024 decimi di millimetro, cioè circa 100 metri. Questo equivale ad aver piegato venti volte il nostro foglio iniziale spesso un decimo di millimetro.
Piegando ancora 10 volte (in tutto 30) saremmo già a 100 km. Con 10 altre pieghe (in tutto quaranta) si arriverebbe a 100 000 km. Infine, con le ultime 10 piegature si arriverebbe allo sterminato numero di 100 000 000 di km, $10^{15}$ decimi di millimetro, $10^{11}$ metri, $10^{8}$ km, cioè due terzi della distanza dalla Terra al Sole. .

A questo punto bisogna che facciate un esercizio. Moltiplicate due numeri a caso della seconda colonna e fate due osservazioni, una sui corrispondenti numeri della prima colonna e una sui numeri della seconda colonna.

Esempio:

| | |
|---|---|
| 11 | 2048 |
| 23 | 8388608 |

**Risultato: 17 179 869 184**

CHIUDERE IL LIBRO

Bene, avreste dovuto osservare due cose:
- primo, che il risultato del prodotto di due numeri della seconda colonna è un altro numero della seconda colonna;
- secondo, il "numero di pieghe" del risultato è al somma dei numeri di pieghe dei due numeri fattori.

Non c'e niente di strano in tutto questo.

I numeri della prima colonna ci dicono quanti numeri 2 moltiplichiamo fra loro. La seconda colonna ci dà il risultato. 5 non è altro che l'esponente della potenza.
5 nella prima colonna vuol dire che moltiplichiamo 2 x 2 x2 x 2 x 2 (= 32).
Moltiplicare il numero che si trova nella riga 3 per il numero che si trova nella riga 5 vuol dire moltiplicare (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2 x 2 x 2). Vediamo subito che le parentesi sono irrilevanti. In ultima analisi moltiplichiamo 2 otto volte per se stesso (cioè 3 + 5 volte).

Ora prendete un foglio di carta a quadretti, e poi scrivete vicino al margine sinistro del foglio gli esponenti e i numeri sulla riga . Rifate lo stesso schema, ma verso il margine destro di un altro foglio. Ora vedete che se fate scorrere un foglio accanto all'altro, potete simulare la somma dei due numeri che indicano gli esponenti, e potete tranquillamente fare $2^{10}$ x $2^{15}$.
E le divisioni? prendiamo coraggio e notiamo che invece di sommare gli esponenti, o su carta o meccanicamente, li dobbiamo sottrarre.

Bene, noi possiamo moltiplicare e dividere tra loro le potenze di 2 con questi due foglietti. Ma gli altri numeri? Domanda, su questa scala in margine, dove sarà il numero 10?
Sarà tra l'esponente 3 (perché $2^3$=8) e l'esponente 4 (perché $2^4$=16), più vicino a 3 che a 4.

Se pensate molto vedete che una migliore approssimazione viene dal fatto che $2^{10} = 1024$, cioè circa $10^3$. Ma teniamo semmai questo metodo per dopo.

Possiamo divertirci ad identificare numeri che non sono potenze di 2 ma sono vicini ad esse.

2 l'abbiamo
10 lo si trova come detto
3 è 30 (vicino a 32), diviso 10
4 lo abbiamo
5 è 10/2
6 è 2x3
7 è tra 4 e 8, un po' più piccolo del secondo
8 lo abbiamo
9 è 3 x 3

Potete fare altre operazioni e verificare che i conti tornano.

E intanto vediamo che introdurre degli esponenti intermedi tra gli esponenti interi non è un'operazione insensata.

Ma certo gli ingegneri non si sarebbero accontentati di un metodo così impreciso.
Che cosa dobbiamo fare per rendere il metodo più preciso?
Semplice. Dobbiamo usare una "base" diversa. Se usiamo 3, vediamo che i numeri della seconda colonna sono ancora più spaziati fra loro e quindi il nostro sistema sarà ancora più impreciso.

D'altra parte, se usiamo come base 1, vediamo che tutte le potenze di 1 sono sempre 1. Di lì non ci si muove. E allora?

CHIUDERE IL LIBRO.

E allora si deve prendere una base vicina a 1 quanto possibile. Per esempio 1.1, 1.01 o 1.001. le tavole dei logaritmi furono costruite nel XVV sec da Neper e Briggs, prendendo come base 1.0000001. Immaginate la pazienza!.

Per il piacere di dare un esempio, scriviamo la tabella con base 1,1, e usiamo solo due cifre decimali.

| esponente | potenza |
|---|---|
| 0 | 1,00 |
| 1 | 1.10 |
| 2 | 1,21 |

| | |
|---|---|
| 3 | 1,33 |
| 4 | 1,46 |
| 5 | 1,61 |
| 6 | 1,77 |
| 7 | 1,95 |
| 8 | 2,14 |
| 9 | 2,36 |
| 10 | 2,59 |
| 11 | 2,85 |
| 12 | 3,14 |
| 13 | 3,45 |
| 14 | 3,80 |
| 15 | 4,18 |
| 16 | 4,59 |
| 17 | 5,05 |
| 18 | 5,56 |
| 19 | 6,12 |
| 20 | 6,28 |
| 21 | 7,70 |
| 22 | 8,14 |
| 23 | 8,95 |
| 24 | 9,85 |
| 25 | 10,83 |

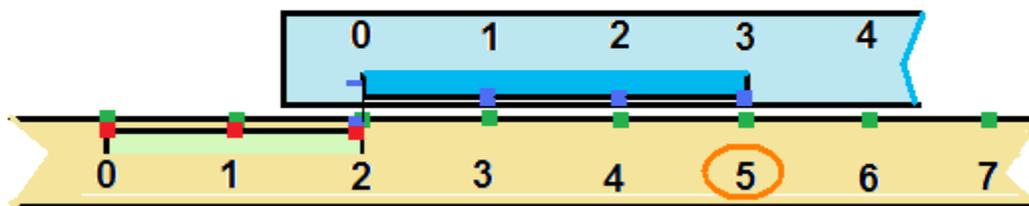
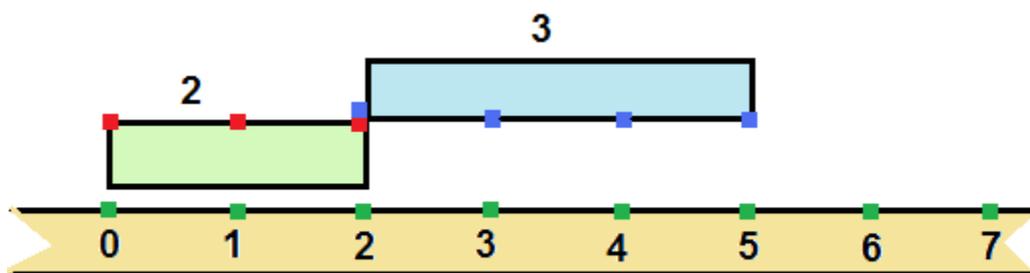
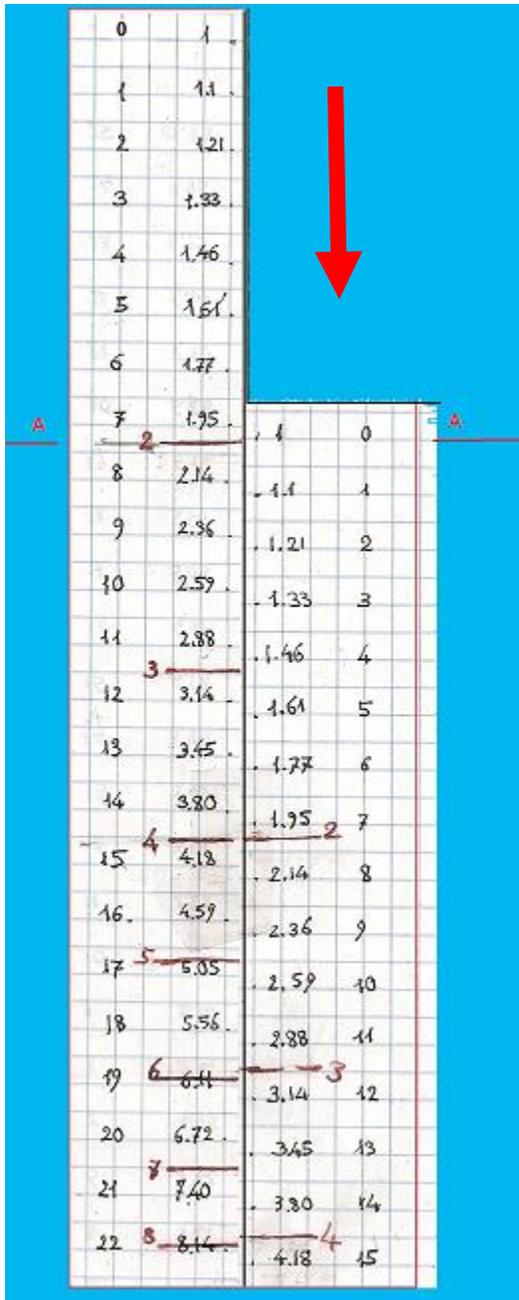
2
3
4
5
9

Può bastare così.
Ora vediamo che

2 (colonna di destra) è tra esponente 7 ed esponente 8
3 tra esponenti 11 e 12
4 è il doppio di 2, ed è tra esponenti 14 e 15
5 è quasi esattamente esponente 17
6 è tra esponenti 18 e 19
7 tra esponenti 20 e 21
8 tra esponenti 21 e 22
9 poco maggiore di esponente 23
10 è inferiore a esponente 25.

Possiamo essere più precisi, ma intanto vediamo che la scala si è già raffinata parecchio.

Possiamo anche fare qualche operazione, magari non precisissima: per esempio 2 x 4 dovr ebbe corrispondere alla  somma dei due esponenti, 7.2+14.5 (ho messo ad occhio il primo), che ci dà 21.7.  Come vediamo, 8 corrisponde a un esponente tra 21 e 22.

La macchina per le moltiplicazioni che vogliamo costruire dovrebbe aiutarci ad ottenere i risultati dei nostri calcoli in modo più diretto.   Se vogliamo una macchina che ci aiuti a sommare 2 + 3 e ragioniamo poco, semplicemente ci tagliamo due righelli di legno o cartone uno lungo 2 unità, l'altro lungo 3 e poi giustapponiamo  gli estremi come in figura. Dopo andiamo a leggere su un righello di riferimento a che cosa corrisponda l'estremo del righello da 3, e troviamo 5.
Poi, se vogliano sommare 5+4 andiamo a tagliarci un righello da 5 e uno da 4 eccetera.
Ma è l'unico modo di riuscire? Non possiamo economizzare legna?
Il trucco (e chi lo trovò era anche lui a suo modo un genio) è quello di non tagliare i righelli in pezzi della lunghezza che ogni volta ci serve, ma:
1) usare il righello di riferimento anche come primo righello (verde)
2) marcare le varie distanze sul secondo righello (azzurro) e vedere a quale numero del righello di riferimento corrisponde il 3.

Naturalmente, con un po' di pratica,  i colori non saranno necessari.
Ma con questo sistema, invece di un'infinità di righelli di varie lunghezze, ce ne bastano due: quello inferiore, su cui leggiamo il primo addendo e leggeremo il risultato, e quello superiore, su cui leggiamo il secondo addendo. Adesso la nostra macchina è pronta. Noi potremmo indicare che sommiamo gli esponenti col metodo che ho appena indicato, ma dobbiamo ricordare che sommando esponenti noi moltiplichiamo potenze di una data base.

La figura a fianco è la copia di un esempio di calcolo. Le striscia di destra è la riflessione speculare di quella di sinistra. Ogni striscia contiene tre numeri:

IN NERO:

1) l'esponente della potenza di 1.1 (questo è all'esterno rispetto alla divisione fra le due strisce);

2) il valore della potenza.

IN ROSSO

I numeri interi interpolati ad occhio.

La moltiplicazione viene fatta sommando gli esponenti. Ma con questo strumento non è necessario cercare gli esponenti, che sono presenti all'estrema sinistra e all'estrema destra , Li ho messi solo per spiegare come si costruisce la macchina e per illustrare il fatto che il prodotto di due numeri corrisponde alla somma degli esponenti..

Se, come nell'esempio, facciamo corrispondere alla linea AA da un lato il valore (interpolato ) di 2, in rosso, e dall'altro l'inizio del regolo (esponente 0, che corrisponde ad 1) possiamo vedere sulla striscia di sinistra i risultati del prodotto di 2 per uno qualunque dei numeri interni, rossi o neri, della striscia di destra. Vediamo che 2 x2 fa 4, eccetera, ma a 2x3 e 2x4 siamo un po' fuori.

E poi notiamo che la nostra macchina fatta di due fogli di carta può darci non solo moltiplicazioni e divisioni (tutte operazioni approssimate), ma può anche estrarre radici quadrate (per esempio misurando la distanza in millimetri e dividendo per due); cubiche, quarte o quinte, dividendo per tre, quattro cinque. Si trovano anche le potenze (moltiplicando le distanze per

l'esponente). Particolarmente le radici terze e superiori sono lunghe a farsi con altro mezzo che col regolo calcolatore o le tavole dei logaritmi o il nostro rudimentale marchingegno.

Ah, dimenticavo. Questi esponenti, interi e non interi, discendenti dall'originale "numero di pieghe", da darsi ad una certa base, 2 o 1.1 o 1.00001,per ottenere un certo numero N si chiamano logaritmi di N.
Per esempio, se abbiamo $2^6 = 64$
diciamo che 2 è la base, 6 il logaritmo in base 2 di 64.

Mentre, da $1.1^{12} = 3.14$ diciamo che 12 è il logaritmo di 3.14 in base 1.1

Inoltre, l'oggetto che abbiamo appena costruito è un prototipo di regolo calcolatore.

Ma il regolo non può fare le addizioni, dirà qualcuno. Si possono fare dei regoli molto più semplici per fare le addizioni. Il bello del regolo è che riduce le moltiplicazioni ad un'operazione più semplice, cioè l'addizione. Ma di operazioni più semplici dell'addizione non ce ne sono.

Notate quest'altro calcolo che dà un curioso risultato.
Cento anni fa, quanti dei **diretti** antenati di ciascuno di noi (padre, madre, nonni, bisnonni; ma niente zii, zie, fratelli, sorelle, cugini e cugine in qualsiasi grado) erano in vita? Probabilmente più di una decina, indipendentemente dalla vostra età. Se siete molto giovani, a quel tempo erano in vita molti dei vostri otto bisnonni e bisnonne, molti dei loro sedici genitori e qualcuno dei loro 32 nonni. Certo ben più di dieci persone. Nel mio caso so con certezza che nel 1910 erano vivi i miei 2 genitori, 4 nonni, 5 bisnonni, totale 11 persone.
Insomma, la stima di dieci antenati diretti vivi 100 anni fa non è cattiva. Semmai è troppo bassa. Ma lo stesso calcolo vale per ciascuno di questi 10 miei (o vostri) antenati. Cento anni prima, duecento anni fa, erano in vita 10 antenati diretti di ciascuno di loro. Quindi nel 1810 dovevano essere vivi circa 10 x 10 dei miei antenati diretti. E 300 anni fa erano 1000. E 400 anni fa erano 10000….e mille anni fa erano dieci miliardi. Ma non c'erano dieci miliardi di persone al mondo 1000 anni fa. Anche contando i Cinesi e gli Indù non credo che tutti insieme sorpassassimo di molto i 300 milioni, un trentesimo del necessario per uno solo di noi. E allora?
E se i miei antenati erano cosi tanti, dove erano i vostri antenati, dieci miliardi per uno?

C'è solo una spiegazione: moltissimi di questi antenati erano gli stessi sia all'interno della mia ascendenza sia tra la mia e la vostra ascendenza. In altre parole, siamo tutti cugini, ed esagerano solo un poco le religioni che dicono che siamo tutti fratelli.

# XXXV. FANTASIE CON LE POTENZE

Tutto quello che abbiamo visto più sopra è basato sulle proprietà delle potenze. Vale la pena giocarci un poco ed estenderne il concetto.

E' facile dimostrare che $a^x a^y = a^{x+y}$

Ad esempio:
$a^4 a^2 = a^6$

Infatti:
(a a a a) (a a ) = (a a a a a a).

E' anche facile dimostrare che $(a^m)^n = a^{mn}$. Infatti, ad esempio, $(a^2)^3$ vuol dire prendere tre volte (a a), cioè (a a) (a a) (a a) = $a^{2 \times 3} = a^6$. Tutto ciò è basato sul fatto che le *a* sono tutte eguali.

Finora dunque gli esponenti sono i numeri naturali, cioè numeri interi e positivi.

Noi, considerando l'esponente come numero di piegature di un foglio avevamo anche concluso che $a^0$ ("nessuna piega") deve valere 1.

Domanda: ha senso estendere il concetto ad $a^{-2}$ ? E ad $a^{0.15}$ ?

Pensare a piegature negative, credo, è impossibile. Ma non è male provare da soli a trovare un significato a queste possibilità.

Per quanto riguarda la prima, $a^{-2}$, se volessimo coerenza con le regole già date, dovremmo avere, ad esempio, che

$\mathbf{a^3 a^{-2}} = a^{3-2} = \mathbf{a^1}$

Ma allora, dividendo $a^1$ per $a^3$, dovremmo avere $a^{-2}$ , e quindi:

$$\frac{a}{a^3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

o, più in generale,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Tra l'altro, possiamo confermare che $a^0 = 1$, perché:

$a^2 a^{-2} = a^0$ ma è anche uguale ad $a^2/a^2 = 1$.

E il caso di $a^{0.5}$ ?
Questo è più interessante, perché ci mette sulla strada di una ampia generalizzazione.
E' comunque chiaro che, se valgono le leggi di cui sopra, dovrebbe essere

$$a^{0.5}a^{0.5} = (a^{0.5})^2 \ \ o\ anche \quad a^{0.5+0.5} = a$$

Cioè $a^{0.5} = a^{1/2}$, che non sono entrambi altro che $\sqrt{a}$.
Allo stesso modo, $a^{1/3}$ non è altro che la radice cubica, $a^{1/10}$ la radice decima eccetera.

Notate bene che se $a^2=b$, allora a è la radice quadrata di b, cioè $a = b^{1/2}$. In generale, se $a^x=b$, allora $b^{1/x} = a$.

A sua volta, $a^{3/10} = (a^{1/10})^3$, cioè il cubo della radice decima.

Ed ora vediamo questa bella generalizzazione:

$$a^{1.375} = a\, a^{0.3}\, a^{0.07} a^{0.005} = a\, a^{3/10} a^{7/100} a^{5/1000}$$

Che potremmo leggere con lungaggine: “ $a^{1.375}$ è il prodotto di *a* moltiplicato la terza potenza della radice decima di *a*, moltiplicato per la settima potenza della radice centesima di *a*, moltiplicato per la quinta potenza della radice millesima di *a*”. Provate con questo sistema a calcolare quanto vale $10^{0.301}$ o addirittura $10^{0.30103}$.

Ci resta ancora una questione da esplorare. Supponiamo di sapere che, ad esempio, $2^6 = 64$.
Vogliamo passare a base 8. Il nostro $2 = 8^{1/3}$. Dovremmo quindi avere che $8^{1/3 \times 6} = 8^2 = 64$.

Questo è vero. Ma se guardiamo tutte le potenze di 2 vediamo che se vogliamo passare a base 8 dobbiamo dividere tutti gli esponenti per 3.
Ad esempio, $2^{12} = 8^4$, e $2^9 = 8^3$.

E che cosa è questo 3 per cui dobbiamo dividere gli esponenti delle potenze di 2? E’ l’esponente a cui dobbiamo elevare 2 per ottenere la nuova base, 8.

Smettiamola una buona volta di parlare di esponenti e chiamiamoli col loro nome di logaritmi.
I logaritmi, come gli esponenti, hanno senso solo se si dichiara o si sottintende una base.

Allora possiamo raccogliere le leggi ritrovate più sopra:

- Il logaritmo (in qualsiasi base) del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri (in quella stessa base).

- (In qualsiasi base) Il logaritmo della potenza n di un numero x è dato dal numero n moltiplicato il logaritmo di x.

- Cambio di base. C’è una certa simmetria nella formula: “Logaritmo in base a di c è eguale al logaritmo in base a di b per il logaritmo in base b di c”.
  E’ come se avessimo inserito una b, prima come argomento poi come base.

$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$.
Mettiamoci dei numeri per convincerci: $\log_2 16 = \log_2 4 \cdot \log_4 16$ (4 = 2 · 2)

- Inverso di un logaritmo. Il logaritmo in base a di b è l'inverso del logaritmo in base b di a. Per questo dobbiamo solo ricordare che se $a^x=b$, allora $b^{1/x} = a$.
  Mettiamoci dei numeri: $\log_2 4 = 1/(\log_4 2)$ cioè 2 = 1/(1/2)

## XXXVI. ESTRAZIONE DI UN LOGARITMO

Se estrarre una radice quadrata è un'operazione che pochi sanno fare col metodo classico, quello che un tempo veniva insegnato in seconda media ( noi sappiamo farlo solo con un metodo approssimato, per quanto efficace), ben poche persone al giorno d'oggi sanno "estrarre un logaritmo", cioè risolvere, ad esempio, l'equazione

$10^x = 2$.

In questa equazione l'incognita x sarebbe il logaritmo decimale (cioè in base 10) di 2.
I logaritmi decimali sono particolarmente simpatici, perché, ad esempio, $10^{2.75}$ vuol dire $10^2 10^{0.75}$. La parte intera, 2 (che per qualche ragione si chiama "caratteristica"), ci dice che $10^{2.75} = 100 \times 10^{0.75}$, cioè il numero è contenuto fra 100 e 1000. La parte decimale (che per qualche ragione si chiama "mantissa"), 0.75, è il logaritmo decimale di un numero tra 1 e 10. Infatti il logaritmo di 1 è 0 e il logarit mo di 10 è 1 e 0.75 è tra i due.
Sapendo i logaritmi dei numeri tra 1 e 10 possiamo così ricostruire i logaritmi in base 10 di tutti i numeri. Poiché poi i logaritmi di uno stesso numero, ma in varie basi, sono tutti proporzionali tra loro, abbiamo modo di scoprire i logaritmi in qualsiasi base, conoscendo la relazione

$$\mathrm{Log}_{10}x = \log_{10}y \ \log_y x, \text{ o anche } \log_y x = \log_{10}x/\log_{10}y$$

Noi risolveremo l'equazione $10^x = 2$ basandoci sulla nostra capacità di estrarre radici quadrate: come vedremo non è l'unico modo.
O con Google, o con la calcolatrice che avete nelle Applicazioni di Windows, o con un elementare programma in QBasic, per prima cosa dobbiamo farci la tabella delle radici quadrate successive di 10.
Le radici successive, come sappiamo, sono
$10^{1/2}$, $(10^{1/2})^{1/2} = 10^{1/4}$, e poi $10^{1/8}$ etc.

Usando i numeri decimali, gli esponenti diventano 0.5, 0.25, 0.125, che mettiamo nella seconda colonna. Nella terza colonna mettiamo i numeri che si ottengono calcolando la radice quadrata del numero che sta nella casella superiore.

| Potenza di 10 Successive radici quadrate | Potenza di 10. Valore decimale dell'esponente | Valore di $10^r$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 10.0 |
| 1/2 | 0.5 | 3.162278 |
| 1/4 | 0.25 | 1.778279 |
| 1/8 | 0.125 | 1.333521 |
| 1/16 | 0.0625 | 1.154782 |
| 1/32 | 0.03125 | 1.074608 |
| 1/64 | 0.015625 | 1.036633 |
| 1/128 | 0.0078125 | 1.018151 |

| 1/256 | 0.00390625 | 1.009035 |
|---|---|---|

Noi troveremo il nostro logaritmo procedendo semplicemente con buonsenso.

1. Chiaramente x è compreso fra 0.25 e 0.5, perché la nostra tavola ci dice che $10^{0.25}$=1.778279, mentre $10^{0.5}$ = 3.162278, e 2 è compreso fra questi due numeri.
Prendiamo sempre il numero inferiore e poi cerchiamo la correzione. Se noi prendiamo 0.25, la stessa tavola ci dice che

$10^{0.25}$ = 1.778279, che è più piccolo di 2.

Quindi x = 0.25+y, o, se vogliamo, 2 = $10^{0.25}10^{y}$ = **1.778279** $10^{y}$
Se dividiamo 2 per 1.778279 troviamo **1.124683**, che è il nostro $10^{y}$.

2. Adesso i numeri sono più complicati, ma il gioco è lo stesso. Noi prima volevamo risolvere l'equazione 2= $10^{x}$ e adesso vogliamo risolvere l'equazione

1.124683= $10^{y}$

Vale a dire, guardando la nostra tabella, y è compreso fra 0.03125 e 0.0625. Prendiamo come il solito il più piccolo, e scriviamo y = 0.03125+z.
Quindi:
1.124684 = $10^{0.03125+z}$ = $10^{0.03125}$ $10^{z}$ =**1.074608** $10^{z}$.
Da cui, $10^{z}$=1.124684/1.074608 = **1.046599**

3. La nuova equazione da risolvere è:

1.046599 = $10^{z}$

Ora, come risulta guardando la nostra tabella, z è compreso fra 0.015625 e 0.03125. Scegliamo il più piccolo. Quindi z= 0.015625 + u

Abbiamo che 1.046599 = $10^{0.015625}10^{u}$ =**1.036633** $10^{u}$

4. Da cui la nuova equazione da risolvere:

1.009614=$10^{u}$

Ispezionando la nostra tabella, vediamo che u deve essere un po' più grande di 0.00390625, e quindi lo possiamo scrivere come: u = 0.00390625 + v
Sostituendo come sopra: 1.009614 = **1.009035** $10^{v}$

A questo punto, mettendo tutto quanto insieme, abbiamo che
2 = $10^{0.25+0.03125+0.015625+0.00390625+v}$ = 1.778279 1.074608 1.036633 1.009035 $10^{u}$ = 1.998855 $10^{u}$
Siamo vicini a 2, con un'errore di una parte su mille, ma non ci siamo ancora proprio.

Il nostro logaritmo decimale approssimato di 2 è la somma degli esponenti
0.25+ 0.03125+ 0.015625+0.003906+u = **0.300781**+u. Purtroppo u ci è incognito, ma deve essere più piccolo dell'ultimo esponente che abbiamo usato, che è 0.003906.
Se adesso guardiamo le vecchie tavole, o chiediamo a Google scrivendo nella ricerca "log(2)", o usiamo una calcolatrice elettronica scientifica, troviamo:

Logaritmo decimale di 2 = 0.30103.

Se chiediamo a QBasic "PRINT LOG(2)", invece troviamo **0.693147.** Perché?
Prima di rispondere a questa domanda bisogna camminare ancora un poco.
Ma intanto notiamo che noi abbiamo sempre scelto l'esponente inferiore, quando avevamo un numero compreso fra due potenze di dieci. Avremmo potuto scegliere il superiore, o, meglio ancora, il più vicino tra i due. Il problema sarebbe stato che ogni tanto la correzione all'esponente sarebbe stata negativa, e alla fine, al momento di mettere tutto insieme, avremmo avuto esponenti negativi e positivi, cioè moltiplicazioni e divisioni da fare. E noi preferiamo le moltiplicazioni alle divisioni (soprattutto se non abbiamo una calcolatrice elettronica).

Alla fine del Settecento l'equazione $10^x = 2$ sarebbe stata risolta senza calcolatori o calcolatrici, e ci sarebbe voluto il suo tempo per farlo. Era uno degli esercizi che il giovane ufficiale di Artiglieria Napoleone Buonaparte trovava sul suo libro di matematica (che noi conosciamo e che si può scaricare da Internet) ed era, penso, un esercizio abbastanza temuto.
Come avrebbe fatto Napoleone?

Avrebbe anche lui sempre cercato di trovare la potenza a cui va elevato un numero più piccolo per ottenerne uno più grande.

Dunque, sia $10^x = 2$.
2 è più piccolo di 10, per cui Napoleone avrebbe anzitutto risolto l'equazione $2^a = 10$, e poi, alla fine del calcolo, si sarebbe ricordato che **x = 1/a**.

Dunque $2^a = 10$. La tavola delle potenze di 2 che abbiamo già costruito, ci dice che $3<a<4$.
Quindi **a= 3+b**, e vale la relazione

$2^{3+b} = 10$ cioè $8 \times 2^b=10$, cioè $2^b = 10/8 =1.25$

Adesso la palla è passata dall'altra parte, perché 2 > 1.25.
Chiamando **1/b = c** abbiamo ora

$1.25^c = 2$

Calcoliamo le successive potenze di 1.25, e troviamo che sono:

| Esponente | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Valore | 1.25 | 1.5625 | 1.953 | 2.44 |

Quindi $3< c < 4$ e noi scriviamo **c = 3 +d**
Cioè abbiamo $1.25^{3+d} = 2$ da cui $1.25^d = (2/1.953) = 1.024$

Di nuovo la palla è passata dall'altra parte, e abbiamo:

$1.024^{1/d} = 1.25$

Chiamiamo **1/d =f**, e facciamo la tabella delle potenze di 1.024

| Esponente | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valore | 1.024 | 1.0486 | 1.0737 | 1.0995 | 1.1259 | 1.15292 | 1.18059 |

| Esponente | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| Valore | 1.20892 | 1.23794 | 1.26765 |

Quindi f = 9 + g.

Mettendo tutto insieme (con ordine e con attenzione) abbiamo che
x = 1/a.
Ma a= 3+b, quindi x=1/(3+b)
Ma b = 1/(3+d), quindi x = 1/(3+1/(3+d))
Ma d =1/(9+g), quindi x = 1/(3+1/(3+1/(9+g)))

Mettendo che g sia trascurabile e cominciando dal fondo , abbiamo che
d =1/9 =0.11,
b = 1/3.11= 0.3215
a =3 + 0.3215 = 3.3215
Quindi x = 1/a = 0.301064, che è assai più vicino a 0.30103 del risultato precedente. Ecco perché Napoleone vinceva le battaglie! Noi avevamo dovuto estrarre otto radici quadrate con 6 cifre decimali. Mica uno scherzo. E' vero però che quella tavola di radici di 10 va fatta una volta per tutte e poi va bene per tutti i logaritmi decimali, mentre col metodo che Napoleone usava (ma non l'aveva inventato lui) ogni equazione del genere $2^x = 10$ o viceversa è un caso speciale.

Notate poi che nella foresta della matematica abbiamo scovato uno strano animale. Il nostro logaritmo decimale di 2 può essere scritto come:

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + g}}}$$

Questo è un esempio di frazione continua. Questa in particolare sarebbe infinita se ad un certo punto non decidessimo di trascurare g. Il modo più semplice di calcolare una frazione continua

infinita è di fermarla ad un certo punto, trascurare l'incognita e fare le sostituzioni partendo dal basso.

Anche il MCD potrebbe essere trovato con una frazione continua, la quale però a un certo punto si ferma. Per esempio:

$$\frac{48}{26} = 1 + \frac{22}{26} = 1 + \frac{1}{\frac{26}{22}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{22}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{22}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{2}{4}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{4}{2}}}}$$

Ma la divisione 4/2 non dà resto, e quindi 2, ultimo denominatore, è il nostro MCD.
Non ci illudiamo: le divisioni che dobbiamo fare (prima 48/26, poi 25/22, poi 22/4, poi 4/2 ) sono le stesse che avevamo dovuto fare col metodo di Euclide.
Per mezzo delle frazioni continue è facile trovare i coefficienti INTERI x e y di due numeri INTERI a e b, tali che la somma ax+by =1. Ciò è sempre possibile **se a e b sono primi fra loro**, cioè il loro MCD =1.
Per stare dalla parte dei bottoni scegliamo due numeri primi, che sono necessariamente anche primi fra loro: a=71 e b=23.

$$\frac{71}{23} = 3 + \frac{2}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{2}} = 3 + \frac{1}{11 + \frac{1}{2}}$$

Valutiamo la frazione senza il termine finale ½.
Abbiamo :

$$\frac{71}{23} = 3 + \frac{1}{11} = \frac{34}{11}$$

Adesso vediamo sperimentalmente come ottenere 1: Moltiplichiamo 71 x 11 = 781 e 34x23 = 782. Vediamo quindi che il numero x =-11 ed il numero y=23 risolvono il problema, perché così facendo abbiamo:
71 x (- 11)+23 x 34 = 1.

E con frazioni continue avremmo potuto anche estrarre una radice quadrata di un numero qualsiasi. Possibile?
Supponiamo di dover risolvere $x^2 = 2$.
Scriviamo questa equazione come :

$$x^2 - 1 = 1$$

$$(x+1)(x-1) = 1$$

$$x - 1 = \frac{1}{1 + x}$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + x}$$

Ora il serpente può incominciare a mangiarsi la coda, perché al posto della x rossa possiamo mettere la x blu.

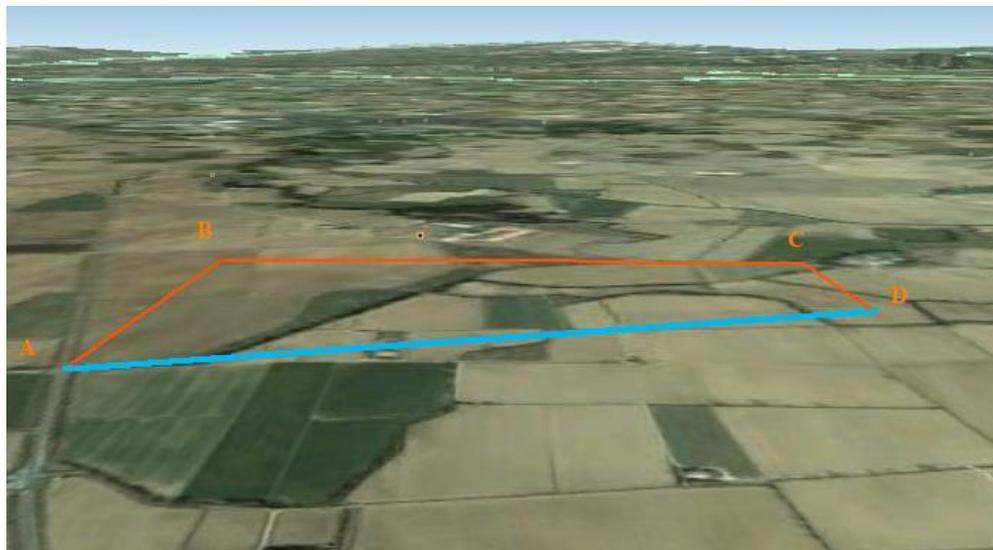
$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + x}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}$$

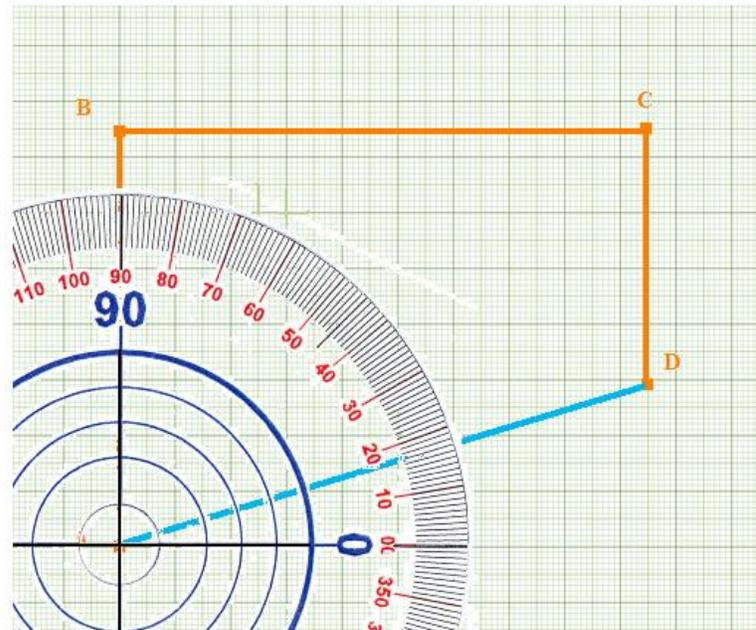
L'abbiamo fatto una volta, possiamo farlo di nuovo, tanto più che la nostra espressione per x si è intanto allungata.

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + x}}}$$

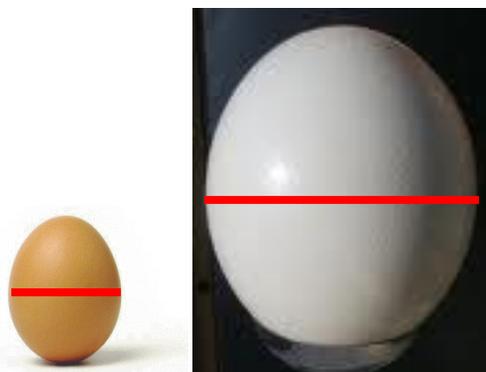
Se ci fermiamo qui e nella frazione approssimiamo x con 1, troviamo x= 1.375, mentre è 1.4142. Tutta questa fatica per una precisione così modesta!  Ma notate che a questo punto possiamo continuare la frazione continua fin che vogliamo, e raggiungere precisioni sempre maggiori, perché a questo punto il gioco è chiaro.

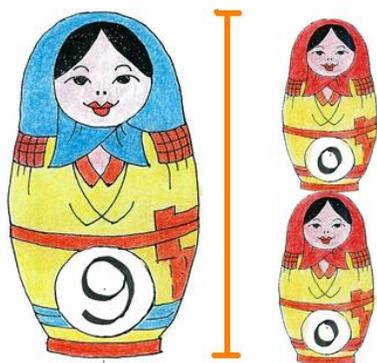
# XXXVII.  MISURE APPROSSIMATE

Quando ero nei boy scout una delle attività più seccanti era la cosiddetta “marcia all'azimuth”.
Alla partenza ci davano un foglio su cui c'era scritto, per esempio:
1) marciare per 750 m in direzione Nord (tratto AB sulla vista qui sotto);
2) marciare 950 m in direzione E (tratto BC);
3) Marciare 460 m in direzione S (tratto CD).
Naturalmente direzioni e distanze potevano essere numeri complicati, ma non era questo il punto.
In campagna il percorso dato era un poligono aperto di tre lati, per esempio come quello che nella vista sottostante è segnato in arancione.

Normalmente queste marce si facevano in montagna, in luoghi impervi, come boschi grondanti d'acqua attraversati da torrenti in piena eccetera.  Assai per tempo mi ero accorto che le marce all'azimuth venivano preparate su una carta topografica, senza tener alcun conto  degli avvallamenti che si potevano incontrare, per cui i punti di arrivo che il Capo si trovava su una cartina topografica erano certamente sbagliati. Quindi, "*à la guerre comme à la guerre*", mi preparavo ad ogni campeggio con qualche foglio di carta millimetrata, un righello e un goniometro. Alla partenza me la filavo nella tenda dove disegnavo sulla carta millimetrata con la massima cura il percorso in scala, prendendo il nord come il lato superiore del foglio. Poi, sempre sulla carta millimetrata, trovavo l'angolo e la distanza del punto d'arrivo dalla partenza (tratto AD), ed infine in un terzo del tempo e con maggior precisione andavo a porre il mio contrassegno sul punto d'arrivo.

Nel caso in esame il risultato (direzione e distanza del tratto azzurro) sarebbe stato 73 gradi (destrorsi) da Nord, e la distanza 990 metri.
Naturalmente, con una buona carta topografica sarebbe stato inutile misurare anche quest’ultima distanza, se vicino al punto di arrivo ci fosse stato qualche buon riferimento sul terreno.

Potenza del disegno in scala! Una volta avevo detto a mio nipote, che avrà avuto dieci anni, in un'auto mentre frignava: "sta buono ed intanto disegnami un chilometro". Pensò per un momento, poi gli occhi gli si illuminarono e mi disse: facciamo che ogni metro sia un millimetro, in un metro ce ne sono mille, io ti disegno un metro... Io restai di stucco, perché non me l'aspettavo.

Quasi ognuno ha un'idea abbastanza chiara di una scala lineare ed è in grado di fare una pianta del proprio alloggio con una certa precisione.

Quando però si passa ad altre forme di scala, le scale si mettono a funzionare in modo imprevedibile.
Veniamo al caso della massaia che deve fare una frittata per dodici. In genere usa un uovo per persona, cioè in tutto dodici uova di gallina. Apre il frigo e vede che per sbaglio il marito ha comprato dodici uova di struzzo. Problema: quante uova di struzzo dovrà usare? Cioè, a quante uova di gallina equivale un uovo di struzzo? Supponiamo che l'uovo di gallina sia simile ad un uovo di struzzo, cioè che quest'ultimo sia semplicemente un uovo di gallina disegnato su scala. (In verità l'uovo di gallina è in genere più smilzo, ma lasciamo perdere questi dettagli).
L'ingrandimento dell'uovo di struzzo rispetto a quello di gallina è per noi sempre l'ingrandimento lineare, perché siamo meno capaci di misurare l'ingrandimento di aree o di volumi. L'ingrandimento lineare si misura facendo il rapporto fra due lunghezze corrispondenti, per esempio i diametri. Quali che siano le lunghezze scelte, altezza o diametro o qualsiasi altra, il rapporto tra lunghezze misurate sull'uovo di struzzo e sull'uovo di gallina vale circa 3. A quante uova di galline equivale un uovo di struzzo?

In Somalia si raccontò per molto tempo la storia di due Italiani che vollero fare le tagliatelle all'uovo usando un uovo di struzzo. Misero farina quanta bastava per una decina di uova di gallina e si accorsero che per quanta farina aggiungessero non bastava mai. Presi dal panico vuotarono un sacco di farina intero: ora c'era troppa farina. Aggiunsero un altro uovo di struzzo. La storia dice che la casa fu a lungo piena di tagliatelle e tutti venivano pregati di portarsene via un po' .
Se avessero avuto un po' di intuito matematico avrebbero visto il loro errore. Non importa qual sia la forma dell'oggetto. Si misura sull'oggetto uovo di gallina una distanza lineare che abbia una chiara controparte sull'uovo di struzzo, per esempio il diametro dell'uovo; poi si misura il diametro dell'uovo di struzzo e si divide per il diametro dell'uovo di gallina. Nel nostro caso otteniamo 3.
**E adesso si fa il cubo del rapporto e si trova il rapporto dei volumi.** E otteniamo 27. Dunque un uovo di struzzo se fosse esattamente simile all'uovo di gallina, equivarrebbe a qualcosa come 27 uova di gallina- Considerando che il rapporto delle altezze è invece piuttosto 2.5 troviamo che il volume dell'uovo di struzzo è compreso tra $(2.5)^3$ = circa 16, e 27, cioè circa 22 uova di gallina,  un risultato, credo, che molti non s'immaginano.

Se invece di due uova gli oggetti fossero stati assai più complessi, purché sempre simili fra loro, per esempio due bambole Matrioska, non sarebbe cambiato nulla. Si sarebbe misurata una distanza qualunque riconoscibile, per esempio l'altezza, si sarebbe fatto il rapporto dei valori trovati per le due bambole, e si sarebbe calcolato il cubo.
In questo caso il rapporto delle altezze è circa 2, e quindi il volume della bambola di sinistra è otto volte il volume di quella di destra (quali che siano i due volumi!).

Possiamo immaginare che ogni oggetto si possa inscrivere in un cubo, e aumentando le dimensioni, **ne occupi sempre la stessa frazione**. Ma per due cubi di lati A e a, è ovvio che rapporto dei due volumi è $(A/a)^3$.

E come si fa a misurare il volume di un solido un po' più fantasioso, come la Matrioska? Se non ci sono complicazioni (per esempio che il modellino sia fatto di una sostanza che a contatto dell'acqua esplode) si fa un modellino su una scala opportuna, e si immerge il modellino (o la Matrioska stessa) in un recipiente graduato, come quelli usati nella cucina per sapere quanto latte occorre o quanta farina. L'acqua deve coprire il modellino: se questo galleggia, bisogna tenerlo sott'acqua, meglio se mettendoci dentro qualche peso. L'aumento di livello dell'acqua rispetto a quando l'oggetto non è presente può essere tarato in modo da darci l'aumento di volume dell'oggetto completamente immerso

Nel caso di aree, come ci si può attendere, queste vanno come il quadrato del rapporto di due lunghezze corrispondenti. Il bello di questa legge è che la superficie della Matrioska piccola è ¼ della superficie della Matrioska grande, tanto in figura piana quanto in tre dimensioni, il che sembra quasi incredibile. Cioè, se vogliamo dipingere di rosso la Matrioska grande ci vuole quattro volte la quantità di vernice necessaria per la Matrioska piccola.

Supponiamo di dover misurare l'area di una palude. Non vogliamo metterci i piedi, perché la palude è abitata da animali che preferiamo non incontrare.
Ci troviamo la palude su una mappa, o la fotografiamo dall'alto. Ritagliamo la mappa della palude su un cartoncino. La pesiamo. Pesiamo un quadrato unità di area nella stessa scala. Il rapporto delle due pesate ci dà l'area della palude sulla mappa.

In figura abbiamo una palude nei pressi di Varese.

Il quadrato in basso a sinistra ha come lato mezzo km. Quindi la sua area è 1/4 di kmq. Se eseguiamo il trucco delle pesate troviamo che il rapporto fra l'area irregolare della palude e il quadrato di ¼ kmq vale 3,3, per cui l'area risulta circa 0.83 kmq.
E se non avessimo conosciuto la scala, cioè non avessimo saputo che il lato del quadrato è ½ km? Allora avremmo dovuto andare vicino alla nostra palude, misurare una qualunque distanza riconoscibile tanto sul terreno quanto sulla foto o sulla mappa, fare il rapporto tra la distanza sul terreno e quella sulla mappa (in cm), e così avremmo trovato la scala. Dalla scala saremmo risaliti alla lunghezza del lato del quadrato, quindi all'area, e moltiplicando per 3.3 avremmo trovato l'area della palude.

Ma ci sono altre cose che possiamo fare facendo dei disegni accurati in scala. Per esempio misurare l'altezza di una montagna, la larghezza di un fiume non guadabile, la distanza fra due punti inaccessibili. Questi sono i problemi dei topografi, che a prima vista sembrano insolubili e invece no.

## XXXVIII. VALUTAZIONI

Ma prima di passare alle vere e proprie misure io direi di considerare delle valutazioni, cioè misure imprecise, che però ci danno un ordine di grandezza delle dimensioni delle che vorremmo misurare.

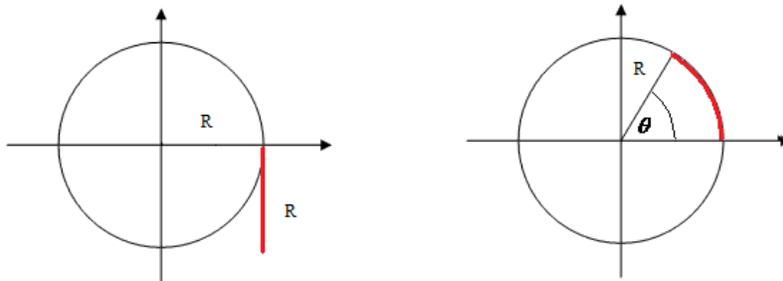
Per esempio, quando incominciate a distinguere i due fanali di un'auto che viene verso di voi, siete a circa 1500 m di distanza. Se siete su un aereo di sera e state atterrando, potete così scoprire quando siete a 1500 metri di altezza, se ci sono auto sotto di voi. Questo dato dipende da come sono fatti i nostri occhi.

Adesso invece stendete il vostro braccio destro o sinistro e tenetelo davanti al vostro occhio. L'unghia del vostro mignolo copre mezzo grado. E che ce n'importa? ce n'importa, eccome. La regola è questa:

$$\text{lunghezza dell'arco} = (\text{distanza}) \times (\text{angolo}).$$

Se l'angolo è molto piccolo possiamo trattare l'arco come un segmento di retta.

Ma perché questa relazione valga come è scritta, l'angolo deve essere misurato in **unità opportune**, che per qualche motivo si chiamano "radianti".

I radianti vengono dal fatto che ad un certo punto i matematici decisero di eliminare l'arbitrarietà delle varie convenzioni. Nell'Ottocento si voleva dividere l'angolo retto in 100 "gradi centesimali" abbandonando la tradizionale scala babilonese che divideva il cerchio in 360 gradi sessagesimali e l'angolo retto in novanta gradi. Grandi discussioni. I matematici risposero "Queste sono tutte convenzioni. Se un extraterrestre piovesse dal cielo, probabilmente non misurerebbe gli angoli né in gradi centesimali né in gradi sessagesimali. In un cerchio l'unico oggetto che ha una misura è il raggio. E poi c'è il buon pigreco, che certo vale lo stesso in tutto l'universo."
Supponiamo, avrebbero detto, di prendere una ruota rotonda e di fissare una cordicella in un punto del bordo. La corda sia lunga quanto il raggio della ruota. Adesso facciamo ruotare la ruota fino a che il raggio, stando aderente all'orlo, non sia adagiato completamente su questo. La ruota, a questo punto, avrà girato di una angolo $\theta$. Questo angolo, che sottende un raggio avvolto sulla circonferenza, lo chiameremo **radiante**, e sarà la nostra unità di misura degli angoli.

Quanti gradi vale? Facile a dirsi se sappiamo fare delle proporzioni.
Intanto quanti radianti vale l'angolo giro di 360 gradi ? Abbiamo visto che l'angolo in radianti è data dalla lunghezza dell'arco diviso il raggio. Per l'angolo giro l'arco è tutta la circonferenza. Divisa per il raggio troviamo che l'angolo giro è $2\pi r/r = 2\pi$. E' un peccato, perché $\pi$ non è un bel numero come 360, che ha tutti i divisori principali che potete pensare. Però ci sono altri vantaggi.

Diremo che "(angolo in gradi) sta a (angolo in radianti) come 360 gradi sta a $2\pi$".
Sapete che le proporzioni non sono altro che rapporti o divisioni:

$$Angolo\ in\ gradi = (angolo\ in\ radianti)\left(\frac{360}{2\pi}\right)$$

In particolare, 1 radiante = $360/2\pi$ =57.2958 gradi.
D'altra parte

$$Angolo\ in\ radianti = (angolo\ in\ gradi)\left(\frac{2\pi}{360}\right)$$

Mezzo grado, in queste unità, vale 1/100 radianti (in verità è piuttosto 1/114 - ma qui ci accontentiamo di una valutazione)
La regola è simpatica perché voi crescete, il braccio si allunga e l'unghia del mignolo ingrandisce. E la regola va sempre bene.

Dunque se l'unghia del mignolo copre esattamente l'oggetto, le dimensioni di quest'ultimo sono 1/100 della distanza.
O, se vogliamo, la distanza è 100 volte le dimensioni dell'oggetto.

Vedi caso, la luna (e anche il sole, ma non ci provate a verificare, o vi rovinate gli occhi) occupa quasi esattamente mezzo grado, cioè come l'unghia del vostro mignolo con il braccio teso. Il diametro della luna è 3476 km. Qual è la distanza? Banale, circa 347600 km. In verità, la distanza media è 381000 km, ma non è poi così male, un errore del 10%: se invece di 100 usate il più preciso 114, correggete anche quel 10%.
Naturalmente bisogna sapere il diametro della luna. Oppure, se sappiamo la distanza, possiamo calcolare il diametro. Chiaramente, qualcosa deve venire dall'osservazione. La Luna è dov'è ed

ha il diametro che ha. Né diametro né distanza possono essere calcolate dai primi principi senza sapere qualcosa di più sulla luna. La relazione che ho dato sopra limita il numero di osservazioni da fare, perché usando il mignolo possiamo calcolare il diametro sapendo la distanza o la distanza sapendo il diametro. Dal diametro poi si passa al raggio, alla superficie, al volume della luna.
Il discorso è lo stesso per il sole, che casualmente copre lo stesso angolo di mezzo grado, cioè la vostra unghia del mignolo, pur essendo molto più grande, e quindi anche molto più lontano. Per esempio, se sapete che è alla distanza di 150 000 000 di km, quale sarà il suo diametro? Incidentalmente, non avremmo né eclisse di sole, né eclisse di luna se per un caso straordinario questi due diametri angolari non fossero più o meno eguali. La luna si allontana di pochissimo dalla Terra ogni anno. Quindi un bel giorno (tra circa seicento milioni di anni) sarà diventata troppo piccola per coprire il Sole, e non ci saranno più eclissi di Sole. Vi immaginate l'ultima eclisse di Sole, con tutti i Terrestri che cercheranno di vederla? … E magari pioverà.

Notate fra l'altro che se in una sera di plenilunio mentre si cena chiedete ai presenti di indicare con le mani o con piatti di diverse dimensioni quanto vedono grande la luna, senza naturalmente guardarla, vi daranno in generale misure venti o trenta volte più grandi – o anche molto di più, anche se sono due fidanzati che hanno passato la sera precedente a guardare la luna..

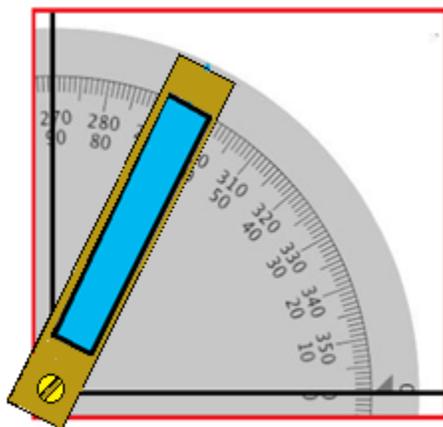
Torniamo sulla Terra. Adesso potete calcolare la distanza di un tram (ma quanto è alto un tram? direi 3 m) in fondo a un viale (ed il tempo minimo che impiegherà a raggiungervi, se fate l'ipotesi che vada a 36 km/ora (perché 36? Perché è un valore realistico e soprattutto si divide bene per 3600, che è il numero di secondi in un'ora). Tenete presente che un tram che va a 36 km ora va alla stessa velocità di un centometrista campione, e fa 10 m in un secondo.

Se vi portate in treno una mappa del percorso con le distanze (e sapete leggerla) potrete misurare l'altezza dei campanili dei vari villaggi.

Ed ora supponiamo di essere in montagna. Volete raggiungere la cima. Quanto tempo ci vuole? Se avete una mappa e sapete dove siete, avete un'idea. Se non avete una mappa, può essere comunque utile sapere qual è la distanza della cima. Vi occorre allora qualcosa di cui conoscete le dimensioni. Se siete fortunati, vedete una persona che è già sulla cima e quasi certamente è alta tra 1 e due metri.
Stendete il braccio. La persona è alta 1/5 dell'unghia del mignolo. Quindi abbiamo arco (=2 m)= distanza x (1/500), ovvero 2 x 500 m = distanza.
Quindi la distanza è 1000 m. Ci vorranno 10 minuti più un certo tempo per il dislivello, cioè circa 10 minuti ogni 100m - a marciare di buon passo.

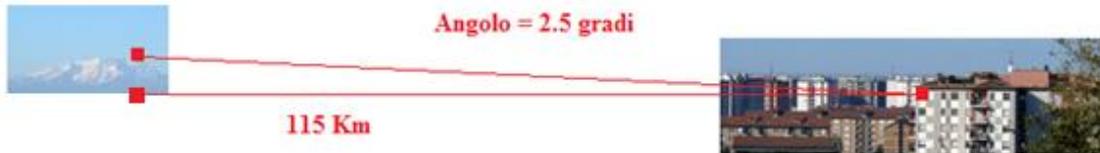
Come si fa a calcolare il dislivello? se il dislivello è poco (per esempio dieci unghie), il metodo dell'unghia funziona ancora. Sappiamo la distanza (1000 m). 10 unghie a quella distanza sono 5/100.
Arco (cioè dislivello) = distanza (1000 m) x angolo (10/100). Quindi cento metri. In venti minuti, mettiamo pure mezz'ora, se non ci sono difficoltà di altro tipo, ci arrivate.

Se il dislivello è maggiore, la carta millimetrata, un goniometro e un righello ci aiutano. Un mio amico che aveva destrezza con le mani si era fatto un decente goniometro con un tubetto di aspirina montato su una tavoletta.

Il tubetto di aspirina, in azzurro nel disegno, aveva anche un mirino con due fili in croce.

Il topografo vi direbbe che bisogna prendere la distanza da noi alla cima, moltiplicarla per il "sin" dell'angolo tra l'orizzontale e la linea che ci congiunge alla cima, e troviamo l'altezza. Il "sin" lo si trova in certe tavole che si chiamano tavole trigonometriche.

Se invece abbiamo la distanza in pianta, come per esempio su una carta geografica, il che è assai più comune, occorre prendere la distanza in pianta, moltiplicarla per la “tan” dell’angolo tra l'orizzontale e la linea che ci congiunge alla cima, e troviamo l'altezza. La "tan" la si trova anch’essa nelle tavole trigonometriche. **Per angoli molto piccoli sin e tan sono più o meno uguali.**

Ma noi che non abbiamo fatto ancora la conoscenza di “sin” e “tan” diciamo che ci disegniamo il triangolo: L'orizzontale, poi l'angolo, poi misuriamo sulla linea inclinata la distanza che conosciamo in una scala opportuna (che tutto il disegno stia nel foglio), tracciamo la perpendicolare alla linea orizzontale. Misuriamo il segmento di perpendicolare e dividiamo per la scala.
Tutto ciò che si può fare con le tavole lo si può fare - sia pure con minore precisione - con un righello e un goniometro (la carta millimetrata non è altro che la combinazione di un foglio di carta ed un righello).

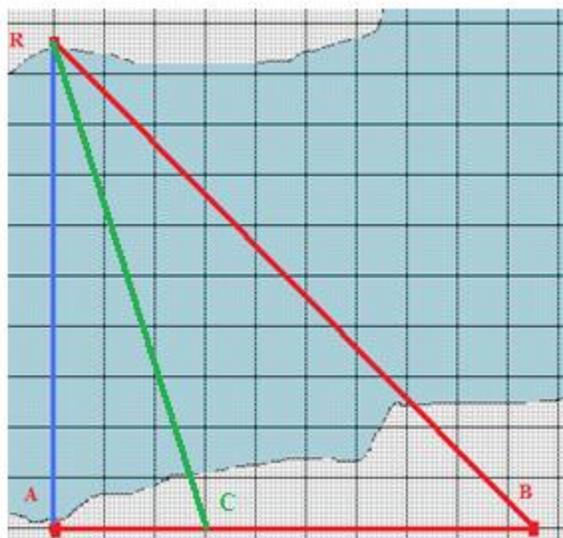
Siete a Milano. Prendete una carta d'Italia, non occorre che sia troppo dettagliata. Misurate sulla carta la distanza dal Monte Rosa. Poi andate sul balcone con un goniometro (meglio se è quello a tubetto di aspirina, e cercate di non inclinare la base) e misurate l'angolo che fa la linea che vi congiunge alla cima del Monte Rosa con l'orizzontale. Fate il vostro disegno in scala e misurate l'altezza del Monte Rosa. Se anche vi viene cinquemila metri invece che 4634, non vi preoccupate; avete già fatto molto meglio dei Romani che credevano che il Monviso fosse più alto del Rosa, mentre è ottocento metri più basso. E i Romani mica erano scemi.

In figura l’angolo è un po’ ingrandito

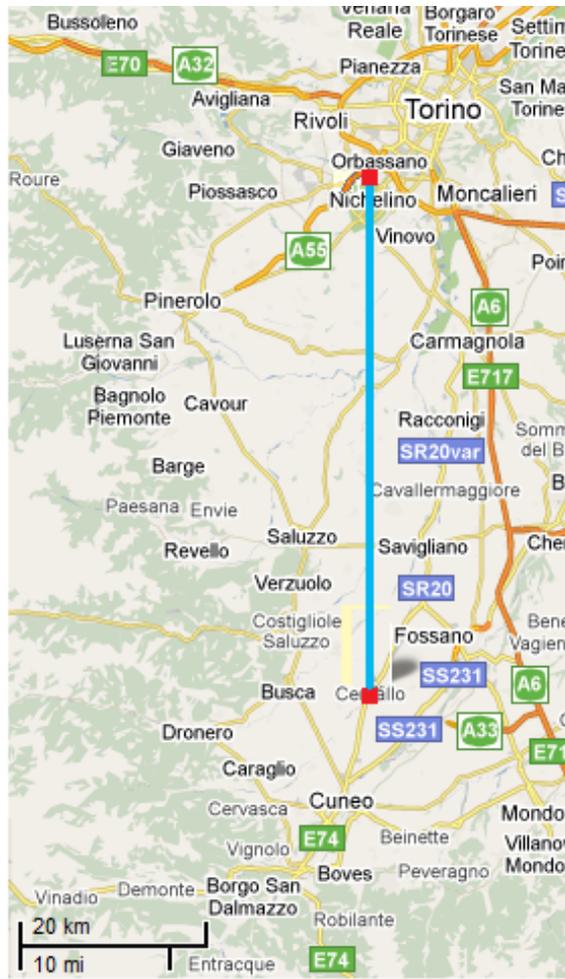
Oppure, visto che sugli atlanti si trova l'altezza del Monte Rosa, ma non la distanza in linea d'aria, quest'ultima può essere tranquillamente calcolata facendo l'operazione inversa, data l'altezza e l'angolo, trovare la distanza.

O infine potete vedere quanto vale il vostro goniometro, considerando che data l'altezza del Rosa, che vi dà l'atlante, e la distanza in linea d'aria, che vi potete calcolare dall'atlante, potete calcolarvi l'angolo di inclinazione che il vostro goniometro dovrebbe darvi.

Per misurare la distanza da un punto inaccessibile, per esempio la larghezza di un fiume o la distanza dalla cima di una montagna lontana, occorre una base di lunghezza nota. Nel secolo scorso si costruirono basi la cui lunghezza fu misurata con la massima precisione. Penso che la base più importante nel Nord-Italia, di dieci km, fosse nei pressi di  Somma Lombardo. Fu costruita nel 1788 e poi restaurata dal  Governo Austriaco nel 1833. Uno degli estremi ha ancora la sua piramide. Trovatela, vale una passeggiata.

Andate agli estremi della vostra base e misurate gli angoli tra la linea della base e la linea che vi congiunge al punto a cui distanza volete misurare. Quindi ricorrete di nuovo alla carta millimetrata e fate un disegno su scala.
Vedrete subito qual è il problema. Se la base è breve  rispetto alla distanza, i due angoli sono praticamente eguali, non potete fare molto. Occorre una base quanto più lunga possibile.  Però non è facile misurare la lunghezza della base con mezzi primitivi, a meno che sia molto breve, nel qual caso si può usare uno spago metrato e ben teso. Quindi, per un canale profondo largo qualche decina di metri, una base di 10 m misurabile con una corda può essere sufficiente. Si può addirittura usare il metodo più antico, che consiste nel cercare un punto di riferimento R dall’altra parte del canale e osservarlo prima da un punto A. Quindi occorre spostarsi sulla perpendicolare che congiunge il punto inaccessibile R e il punto della prima osservazione A, fino al punto B da cui l’angolo fra la direzione di A e quella di R è  45  gradi. A questo punto il nostro sarà un triangolo rettangolo isoscele, e la distanza cercata AR sarà eguale alla AB.  Questo esercizio lo si può fare direttamente sul terreno, con un buon goniometro o una buona bussola, e non occorre neanche un foglio di carta millimetrata.
Però, come vedete dalla figura, con un foglio di carta millimetrata (e una bussola per orientare il foglio), voi potete fermarvi a qualsiasi punto C della base AB, disegnare l’angolo giusto, e ricavare la distanza AR.

Un triangolo rettangolo più essere tracciato col metodo egiziano, che vedremo più avanti.

Con quel che vi ho detto in questo capitolo, il mondo intorno a voi deve aver acquistato una struttura. Ha delle dimensioni. Ora è casa vostra. Prima non lo era.

Ah, dimenticavo.
Possiamo anche calcolare le dimensioni della Terra. Prendete un atlante ( o andate a cercare su Internet i valori della latitudine e longitudine di due città). Sceglietele che abbiamo lo stesso valore della longitudine, che è un altro modo di dire che sono sullo stesso meridiano. Per esempio Centallo e Orbassano - perché no? - si trovano a quasi esattamente mezzo grado di distanza sullo stesso meridiano. E' meglio scegliere città piccole, perché in quelle grandi non si sa mai dove piazzare l'origine o il centro. E trovate che la distanza è 55 km in linea d'aria. Dunque mezzo grado è 55 km. Quanto è lungo il meridiano intero? quanto è lungo il raggio della Terra? Il meridiano intero copre 360 gradi, quindi 720 mezzi gradi. La lunghezza totale sarà 720 x 55 km = 39600 km ed il raggio 39600/6.28 = 6305 km. Il risultato vero è 6356 km.
Non così male.
Naturalmente se seguite le strade rotabili, statali e provinciali, tra Centallo e Orbassano non andrete in linea retta. Però, passando per Cavallermaggiore e Savigliano, farete più chilometri, e il raggio terrestre vi verrà più lungo. Ma avrete commesso un errore.

## XXXIX.  IL RITORNO DELLE  DIVISIONI.

Ammettiamo che a pochi piace fare divisioni. Diversamente dalle simpatiche addizioni e dalle quasi divertenti moltiplicazioni, con qualche riserva per le sottrazioni, le divisioni frequentemente ci abbandonano con dei numeri decimali periodici che non sappiamo bene come trattare.  Il consiglio l'ho già dato. Se uno non sa bene come fare con i numeri periodici, la cosa migliore è di conservarli come frazioni fino all'ultimo.

Per esempio 1/3+ 5/7 =  22/21 ed a questo punto possiamo eseguire ( o no) la divisione.  Almeno sappiamo già che 1/3+5/7  è maggiore di 1.

Io ricordo benissimo il vero panico che mi davano i decimali periodici. Eppure, a ragion veduta, i numeri decimali periodici sono pieni di interessanti insegnamenti. E' come imparare a nuotare: bisogna avere il coraggio di tuffarsi, e si scopre un nuovo mondo.

Fra l'altro, visto che fare le divisioni è noioso, qui un calcolatore piccolo o grande può essere d'aiuto.
Ma bisogna che almeno una divisione la facciamo per esteso:
Dividiamo 1 per 7.

Fermiamoci qui e contempliamo.  Abbiamo cominciato con 1 e poi si sono presentati i  seguenti RESTI:  3,2,6,4,5,1. Siccome si è ripresentato il resto 1, siamo da capo dove eravamo all'inizio. Dato che noi non faremo altro che aggiungere altri zeri, i resti necessariamente saranno gli stessi ed anche  i quozienti saranno gli stessi. Questo dunque è il meccanismo di formazione della periodicità. Ma adesso arriva una prima sorpresa. I resti differenti della divisione per 7 non possono essere altro che:  0 (nel qual caso il numero è divisibile  per 7) oppure 1,2,3,4,5,6.   Il numero 7 non può essere un resto, perché possiamo ancora togliere un 7. Invece  8, 9,10 etc.  non compariranno mai.

Al massimo dunque ci sono sei resti nella divisione per sette. E siccome appena un resto si ripresenta, tutti i resti che lo seguivano si ripresentano uno dietro l'altro nello stesso ordine fino a ritornare a lui, il periodo della divisione per sette è **al massimo** lungo sei cifre, come abbiamo visto. Dato che il periodo è realmente lungo sei cifre, dividendo per sette qualsiasi altro numero che non sia divisibile esattamente per sette, otteniamo lo stesso periodo nella stessa successione.

Per esempio 2/7 = 0,285714 285714

Come predetto, sono gli stessi numeri che compaiono nella divisione 1/7, solo incominciano in un altro punto del periodo.

Notiamo inoltre che tutto quell'abbassare di zeri (sei per la precisione) vuol solo dire che abbiamo diviso 1000000, cioè $10^6 = 10^{(7-1)}$, per 7 ed abbiamo trovato resto 1. Ma questo avremmo dovuto saperlo: è il nostro “piccolo gigante”. Dati due numeri primi fra loro, a e p, la divisione di $a^{(p-1)}$ per p dà resto 1.

Notate bene che il 10 e le sue potenze saltano fuori perché siamo in base dieci.

Per il 7, il fatto che $10^{7-1}$ diviso 7 dia resto 1 vuol dire che $10^6-1$ è divisibile per 7. Ma quanto vale $10^6-1$? E' 999999. Potete andare sul sicuro: dato un numero primo, il numero composto da (p-1) cifre 9 è esattamente divisibile per p.
Ciò non vale per 2 e 5, divisori della nostra base 10, ma vale per tutti gli altri numeri primi.
Quindi:

**999999999999 è divisibile per 13**

**999999999999999999999999999999 è divisibile per 31**

Eccetera.
**E ciò vale “quasi” solo per i numeri primi.** Sono rarissimi – ma esistono – i numeri eccezionali che si fingono primi a questa maniera.

Notate poi che se 999999 è divisibile per 7, lo sono anche 111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777 (questo addirittura è divisibile per $7^2$), 888888. Perché? Ci sono eccezioni a questa regola?

Il perché e il percome sta in un teoremino tranquillo tranquillo, che ha però un nome importante: si chiama nulla meno che Lemma di Euclide, strumento per dimostrare il TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA. Il Lemma ci assicura che se un numero divide il prodotto di due fattori, o divide l'uno o divide l'altro dei due fattori.

Se quindi scriviamo che 999999 = 111111 x 9 è divisibile per 7, il teoremino ci assicura che 7 o divide 9 o divide 111111. Però vediamo subito che 7 non divide 9, quindi….

La dimostrazione del teoremino tranquillo tranquillo è tutt'altro che immediata. Noi però potremmo arrivarci facilmente – almeno per il caso più semplice - basandoci sul fatto a noi noto che il MCD di due numeri può essere espresso come una combinazione (i matematici direbbero

“una combinazione lineare”) dei numeri dati. Supponiamo che un numero **primo** *p* divida un prodotto *ab*, ma non divida *b*. Dobbiamo quindi dimostrare che *p* divide *a*.
Se *p* non divide *b*, dato che *p* non ha divisori, vuol dire che il MCD di *p* e *b* è 1. Ma allora, “come sappiamo”, $1 = Ap+Bb$. Adesso moltiplichiamo ambo i lati per *a*, ottenendo $a = aAp+aBb$. Adesso scriviamo *aBb* come *Bab* e ricordiamoci che *p* divide *ab*, cioà $ab = kp$.
Abbiamo allora $a =aAp+Bkp= (aA+Bk)p$, cioè **p divide a**.

Su questa base si dimostra il teorema fondamentale dell’aritmetica, secondo cui un numero può essere scomposto in fattori primi in un sol modo. Si tratta di una dimostrazione per assurdo.
Se una fattorizzazione non unica è possibile, ci deve essere un numero più piccolo tra tutti quelli che possono essere fattorizzati in due modi. Chiamialmolo $m = p_1p_2p_3\ldots p_n= q_1q_2q_3\ldots q_n$.
Uno qualunque dei numeri p, ad esempio $p_1$, divide m, cioè divide $q_1q_2q_3\ldots q_n$. Quindi, o divide $q_1$ o divide il prodotto $q_2q_3\ldots q_n$. Ma tanto $q_1$ quanto $q_2q_3\ldots q_n$ essendo più piccoli di m, devono avere un’unica fattorizzazione. Quindi $p_1$ è eguale a una delle q, per esempio $p_1= q_i$ e possiamo eliminare i due termini dalle due fattorizzazioni di m. Il risultato è che ora il numero che ha due fattorizzazioni è un nuovo $m_1$, più piccolo di m, il che è impossibile, perché m è già il più piccolo numero che gode di questa proprietà. Quindi non ci sono numeri con doppia fattorizzazione in numeri primi.

Torniamo alle divisioni in generale. Quali divisioni non danno un periodo? Quelle in cui il divisore ha come unici fattori 2 e 5, i divisori di 10. Di questi numeri, ce ne sono solo 14 inferiori o eguali 100, a parte 1. Provate a vedere se trovate quali sono.
Quindi 10/125 non dà un numero periodico (= 0.08).
Anche $1 /(2^{50} 5^{12})$ non dà un numero periodico. Provare per credere.

Ora facciamo un'altra osservazione. è sempre vero che 1/p, con p numero primo) in base dieci è periodico con periodo (p -1)?
La risposta è sì. Ma attenzione, anche se il divisore è un numero primo, il periodo può essere più breve. Però, dato che la periodicità (p-1) è sempre rispettata, il periodo reale deve essere sempre un divisore di (p-1).

Vediamo 11, numero primo. Ci aspetteremmo una periodicità con lunghezza 10. In verità questa periodicità esiste, ma esiste un periodo più breve.

1/11= 0.0909090909 0909090909

e si vede subito che il periodo è in verità lungo due cifre.
Vediamo che fanno gli altri numeri divisi per 11. Ci interessa soltanto la divisione per 11 di 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, perché ogni altro numero può essere espresso come:
11 n+1, 11n+2,.....11 n+10. La prima parte non contribuisce resti (ricorderete che il resto della somma è eguale alla somma dei resti). L'ultima parte è una delle dieci frazioni che abbiamo detto.

1/11=0,0909090909
2/11=0.1818181818
3/11=0,2727272727
4/11=0,3636363636

5/11=0,4545454545
6/11=0,5454545454
7/11=0,6363636363
8/11=0,7272727272
9/11=0,8181818181
10/11=0,9090909090

Osservate bene e cercate di vedere che cosa ci dice la tabellina.

1/11=0,0909090909
2/11=0.1818181818
3/11=0,2727272727
4/11=0,3636363636
5/11=0,4545454545
6/11=0,5454545454
7/11=0,6363636363
8/11=0,7272727272
9/11=0,8181818181
10/11=0,9090909090

Ci sono cinque classi di periodi di lunghezza 2.. La somma delle cifre del periodo è sempre 9. Le prime due cifre dei periodi sono i multipli successivi di nove. Inoltre, dato un numero della classe (p.es.1) troviamo facilmente l'altro numero che dà essenzialmente lo stesso periodo, cioè (11-1 = ) 10.

Una simile proprietà è visibile anche in 1/7=0.143856 143856. Dividete il periodo in due parti eguali (quindi tre cifre ciascuna) e vedete subito che la prima cifra più la quarta, la seconda più la quinta, la terza più la sesta danno sempre nove.

143 856

Ci sarà una relazione del genere anche per 1/17? Allora basterebbe conoscere otto cifre del periodo per indovinare le altre.

“Ma, dirà qualche coraggioso (ce ne sono sempre), qui si parla del periodo del quoziente di 1 per un numero primo. E se il numero non è primo?”. Osserviamo bene. Noi dividiamo 1 per il numero primo. Ci si presentano uno dopo l’altro una fila di resti, che diventano di volta in volta i nuovi dividendi. Questa fila di resti è lunga al massimo *p – 1*, tutti i numeri più piccoli di p. Dopo al massimo *p - 1* resti se ne deve ripresentare uno già visto, e di lì in avanti ricompariranno tutti gli altri nello stesso ordine. Inoltre, se il numero è primo, abbassando zeri uno dopo l’altro noi non facciamo altro che raggiungere la potenza $10^{p-1}$ la quale, divisa per p,

dà resto 1 riportandoci da capo. Se il numero N non è primo, noi già sappiamo che a furia di abbassare zeri ad un certo punto arriveremo ad una divisione di $10^M$ per N che darà resto 1. Ciò avverrà quando $M = \Phi(N)$. Quindi il periodo della divisione di 1 per N conterà al massimo $\Phi(N)$ cifre. Se sarà un numero R minore di $\Phi(N)$ , dato che comunque la lunghezza $\Phi(N)$ dovrà essere rispettata, ciò significa che R deve essere un divisore di $\Phi(N)$. Quindi, ad esempio, 1/15 avrà periodo al massimo lungo 8 cifre o sarà un suo divisore.

Siamo un po’ come degli esploratori nell'Amazzonia che trovano sconosciute farfalle strane. Spiegare queste osservazioni, vuol dire portarci all'avanguardia della teoria dei numeri, che si occupa dei numeri naturali.
Pensate un po’ , voi siete – presumo – alle prime armi e avete di fronte a voi dei risultati davanti ai quali illustri matematici si sono rotti la testa senza trovare spiegazioni. Noi siamo già andati avanti con lo studio dei periodi che risultano dalle divisioni di un numero per un altro.

- Sappiamo che quel che conta è solo il denominatore.
- Sappiamo che - in base 10 - solo i prodotti di potenze di due e di cinque non danno periodi.
- Sappiamo che dividendo 1 per un numero primo p il periodo è al massimo lungo p-1 o comunque la sua lunghezza è un divisore di p-1.
- Sappiamo che se N non è primo, il periodo avrà come lunghezza $\Phi(N)$ o un suo divisore.

Ma qui ci fermiamo. Perché 7 ha il periodo più lungo possibile, 6 cifre, mentre 11 dà cinque periodi di due cifre, 9 dà nove periodi di 1 cifra, 13 dà 2 periodi di 6 cifre, e 17 dà di nuovo un periodo "massimo" di 16 cifre?
Questo non lo si sa. Forse lo scoprirà uno di voi.

Così è la Matematica. Se andate a Londra e volete vedere la Regina, non è facile. Prima vi ferma una sentinella sulla porta, poi intervengono vari dignitari, di grado sempre più elevato, e finalmente, se tutto va bene, la Regina vi riceve. In Matematica la Regina (la Teoria dei Numeri - i matematici la chiamano la Regina) vi riceve lei stessa sulla porta della sua reggia. Così incomincia la matematica. Così incomincia il grande gioco.

## XL. DIVISIONI E TARTARUGHE

Se ritorniamo alla tecnica della divisione che abbiamo imparato alle elementari, scopriamo che ha delle applicazioni più generali.

Supponiamo di avere la frazione

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

Ora, possiamo facilmente vedere in vari modi che questa frazione vale 2. Il più semplice (pura forza bruta) è scrivere ½ come 0.5, che ci conduce ad avere 0.5 come denominatore, e poi la divisione 1/0.5 dà 2.
Fin qui abbiamo scoperto l'acqua calda.
Più elegantemente potremmo anche tenere le frazioni al denominatore, eseguire l'operazione 1-1/2 =1/2 e applicare la regola della divisione di frazioni (quanti mezzi stanno in un intero?).

Ma una frazione non è altro che una divisione. Potremmo organizzare la divisione come facevamo alle elementari?? E che cosa troveremmo?

Cercate di seguire questo schema

**1** | $1-\frac{1}{2}$
--------------------------------

$1-\frac{1}{2}$ | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

--------

$+\frac{1}{2}$

+ ½ – ¼

---------------

+ ¼

+ ¼ - 1/8

----------------

+ 1/8

Che cosa abbiamo fatto?
Compito: dividere 1 per 1-½.
1 diviso 1 = 1. Scriviamo a quoziente, 1 in rosso.
Moltiplichiamo 1 per (1-1/2) e sottraiamolo al dividendo. Cioè , avendo trovato un primo risultato grossolano, 1, vogliamo vedere quanto del dividendo ci resta ancora da dividere per (1-1/2). Ora 1- (1-1/2) = + ½ (nostro nuovo dividendo, che, naturalmente, è più piccolo del precedente)
Ripetiamo il procedimento: ½ diviso 1 = +½. Scriviamo a quoziente ½, in blu.
Moltiplichiamo 1/2 per (1-1/2), troviamo ½-1/4 e sottraiamo a ½, che era il nostro dividendo. Risultato, ¼, nuovo dividendo, in nero.
Ripetiamo il procedimento, ¼ diviso 1 dà ¼, scriviamolo a quoziente, in verde. Eccetera.

Non è semplice e ci si può facilmente perdere la testa. Riposatevi e ripetete domani.
Ma il risultato è molto importante!

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots.$$

…fino all'infinito.

Questa formula è notevole, anche perché sappiamo il risultato, che abbiamo trovato all'inizio per pura forza bruta. **La somma di quegli infiniti termini vale 2**. Cioè i termini sono infiniti ma diventano sempre più piccoli. Con una piccola calcolatrice o con un programma QBasic potreste verificare che la somma si avvicina sempre di più a 2 ma non lo raggiunge mai, perché lo raggiunge solo all'infinito.

Sono particolarmente importanti quei cambiamenti di segno che risultano dalle sottrazioni dai vari dividendi, e che, anche se incominciamo con una frazione che ha un meno al denominatore, ci danno a destra quello che si chiama una serie infinita di termini tutti positivi.

Notate che i denominatori non sono altro che le potenze successive di 2, cioè $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$ eccetera.

Suggerirei di fare esperimenti con questa formula, per esempio provando con diversi denominatori.

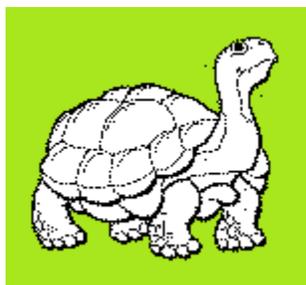
Più facile:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

Più difficile:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

E anche qui otterremo due serie infinite, l'una che vale 10/9 =1.11111 e l'altra che vale 2/3=0.6667.
Ma quello che importa è che questi due innocui numeri possono essere espressi per mezzo di serie di infiniti termini. Notate che questo, i maggiori intelletti della Grecia proprio non riuscivano a capirlo. Uno di loro escogitò l'insolubile (credevano i Greci) paradosso di Achille e della tartaruga.
Achille "pié veloce" era il più veloce dei Greci. La tartaruga, il più lento dei quadrupedi, lo sfida

alla corsa sui cento metri piani, ma vuole un piccolo vantaggio, di un metro. Achille fa i cento metri, ma intanto la tartaruga percorre un metro. Ora Achille fa il metro, ma intanto la tartaruga percorre un centimetro. Adesso Achille percorre il centimetro, la tartaruga fa un decimo di millimetro. Eccetera. Morale, Achille non raggiunge "mai" la tartaruga. I Greci sapevano benissimo che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga in pochi secondi, e quindi pensavano che questo paradosso rivelasse qualche strano inghippo nel meccanismo del nostro cervello. Naturalmente non è così. Il numero di passi può essere infinito ma né la lunghezza totale né il tempo impiegato deve necessariamente essere infinito.

In metri, Achille percorre:

$100 + 1 + 1/100 + 1/100^2+1/100^3$….

A parte i 100 m iniziali, gli infiniti termini che seguono non sono altro che lo sviluppo in serie infinita della frazione

$$\frac{1}{1-\frac{1}{100}}$$

Il cui valore è 100/99=1.010101, cioè poco più di un metro, come avremmo potuto immaginare. E se Achille fa i 100 m in 10 secondi (a quel tempo non c'erano scarpe speciali, tute speciali etc.) raggiungerà la tartaruga in 10.1 secondi circa.

Detto x un numero più piccolo di 1, la serie che abbiamo incontrato si scrive in forma generale

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

E si chiama "Serie geometrica".

E chi ha buona volontà e si diverte a fare qualche passaggio di algebra a questo punto può chiudere un problema incontrato in passato.

Supponiamo di avere il numero 0.23333… periodico.

Possiamo scriverlo come $\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}$

Che a sua volta può essere scritto come (badate ai vari trucchi)

$\frac{20}{100} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{1}{100}\left(20 \ + \ 3 \ \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \ldots\right)\right)$

Ma la serie nella parentesi più interna non è altro che la frazione 10/9.
Quindi

$$0.2333 = \frac{1}{100}\left(20 + \frac{30}{9}\right) = \frac{210}{900} = \frac{21}{90}$$

Cioè ricaviamo la regola che avevamo dato per ricostruire la frazione generatrice di un numero decimale periodico

E se x è maggiore di 1 nella frazione $\frac{1}{1-x}$ ? Per esempio, che succede se x = 4?

Fare il calcolo con la frazione è banale, e il risultato è -1/3.

Se sostituiamo nella serie con le x, otteniamo invece 1+4+16+64 etc. Cioè otteniamo il risultato sensazionale

$$-\frac{1}{3} = 1 + 4 + 16 + 64 \ldots$$

In altre parole, un numero negativo è eguale ad una somma di termini crescenti tutti positivi. Chiaramente qui cioè qualcosa che non va. Alla fine del ‘700 ancora non si capiva da dove uscisse questo risultato. La teoria fu costruita cinquant’anni dopo, e si riassume in quelle parole apparentemente innocue, che

**x deve essere minore di 1.**

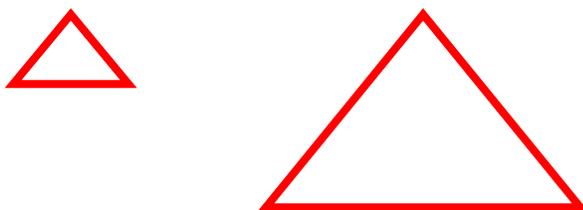
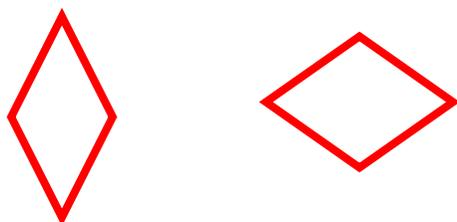
---

## XLI. I TEOREMI E IL TEOREMA DEI TEOREMI

Per molti adulti, il nome teorema provoca cattivi ricordi e cattivo umore. C'è chi capisce cos'é un teorema e chi non lo capisce. Infine c'è chi non lo vuole capire.
Il nome è poco chiaro (viene dal greco), e poi bisogna imparare un dizionario di una ventina di parole greche, ma l'idea è chiara.
Teoremi ce ne sono dappertutto, ma i teoremi che riguardano la geometria sono tra i più antichi.
I greci decisero che la nostra mente funziona cosi:
1) ci sono dei concetti primitivi. In geometria sono punto, retta, piano. Di questi possiamo farci soltanto un'idea. La retta è sottilissima, ed è infinita. Nessuno di noi ha mai visto una retta, né la vedrà mai, se non con gli occhi del pensiero.
2) Sulla base di questi concetti primitivi, si costruiscono definizioni di altri oggetti del pensiero. Per esempio il triangolo, costituito da tre pezzi o segmenti di retta messi insieme in un certo modo. I tre segmenti di retta sono i lati, che formano tre angoli, se presi a due a due. Pensate che i primi triangoli furono forse tracciati nel fango dopo le inondazioni del Nilo cinque o seimila anni fa dai primi geometri (non vuol dire altro che "misuratori della terra") per evitare le liti tra vicini che dicevano: il mio campo arrivava fino qui, no fino qui. Vedete quanto cammino si è fatto dal Nilo.
2) Ci sono delle conclusioni evidenti, che non hanno dimostrazione. Questi sono gli assiomi e i postulati (due nuove parole, una greca e una latina) che indicano più o meno la stessa cosa.
3) Sulla base delle definizioni e degli assiomi e postulati si possono costruire altri ragionamenti più complessi.
Le conclusioni di questi ragionamenti, però, non sono ovvie. La nostra mente costruisce conclusioni che non sono già scritte nelle definizioni.
Così è tutta la matematica, una immensa costruzione della mente dell'uomo, basata su pochi concetti fondamentali.

Noi ci chiediamo, per esempio, che cosa vuol dire che due triangoli sono eguali. La risposta è una definizione. Due triangoli sono eguali quando si possono sovrapporre esattamente l'uno all'altro. Ciò richiede che le figure geometriche possano esser fatte scorrere su un piano a nostro piacere. Questo è un postulato. Ma badate bene, si può pensare di vivere su superficie che non consentono questo scorrimento. Se tracciate una figura su una sfera, potete far scorrere una figura senza deformarla come su un piano. Se invece vivete su un uovo, anche perfetto, le figure tracciate su un uovo non possono esser fatte scorrere sulla superficie dell'uovo come ci pare, ma solo in certe direzioni.

Ma torniamo al piano, dove le figure possono scorrere liberamente. Vediamo subito (con gli occhi del pensiero) che quando un triangolo è sovrapposto all'altro, sono per forza eguali i tre lati e i tre angoli corrispondenti. Dunque, senza sovrapporre i triangoli, possiamo dire che due triangoli sono eguali quando sono eguali i tre lati e tre angoli corrispondenti. Ma è proprio necessario che verifichiamo con un decimetro e un goniometro che questi sei elementi, tre angoli e tre lati, sono effettivamente tutti eguali? La risposta è che non è necessario. Basta che siano eguali tre di loro, non proprio scelti a caso, cioè un lato e due angoli , oppure due lati e un angolo, oppure tre lati.

E se abbiamo tre angoli eguali? Ahimè non basta. Vedete i due triangoli in figura, i tre angoli sono eguali, ma i lati sono diversi ed evidentemente i triangoli non sono eguali.

Vediamo per esempio il caso dei tre lati eguali: notate bene che nel caso di un quadrilatero non è vero che due quadrilateri sono eguali se hanno i quattro lati eguali (la figura lo dimostra. I pantografi di un treno vanno su e giù cambiando forma pur avendo i quattro lati sempre eguali ).

Il teorema dei teoremi, perché tutti lo conoscono, almeno di nome, è il teorema di Pitagora, che si riferisce ai triangoli che hanno un angolo retto, cioè  ai triangoli rettangoli.
Qui di nuovo occorre un po' di greco.
I due lati del triangolo rettangoli che formano l'angolo retto si chiamano cateti. Il lato lungo, opposto all'angolo retto,  si chiama ipotenusa.
Ed ecco il teorema:
"La somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa" (vedi figura).
Questo si chiama teorema se è scritto così. Ma se lo si scrive :
"Dimostrare che la somma etc." diventa una proposizione, cioè  la proposta di una dimostrazione. Che è la stessa cosa che teorema. Io non so quanti scolari di dodici tredici anni si sono persi soltanto per motivi di vocabolario greco.
Ma ad usare il greco c'è qualche cosa di bello. Vi potete immaginare di far parte di una stessa scuola universale di centinaia di  milioni di studenti che da più di duemila anni studiano la geometria usando più o meno le stesse parole.

Pitagora (dalla “Scuola di Atene”, di Raffaello)

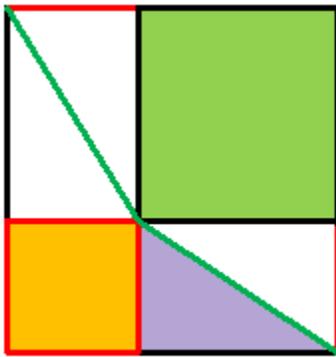
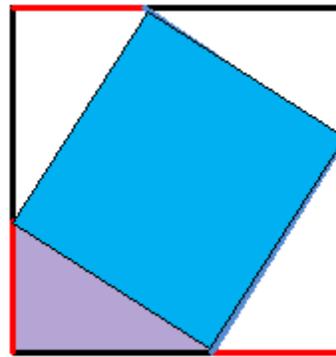
Del teorema di Pitagora esiste almeno un centinaio di dimostrazioni. Vediamone una semplice. Il grande quadrato i cui lati sono la somma di cateti può essere spezzettato in due modi principali.

Primo modo, in cui sui lati segniamo uno dietro l’altro:

Primo lato: cateto breve, cateto lungo (lato orizzontale in basso)
Secondo lato: cateto breve, cateto lunto (verticale a destra)
Terzo lato: cateto lungo, cateto breve (orizzontale in alto)
Quarto lato: cateto lungo, cateto breve (verticale a sinistra,.

Ci sono due cateti brevi e due cateti lunghi a contatto.

Ora congiungiamo i vari punti come in figura. Vediamo che così abbiamo spezzettato il grande quadrato in un quadrato costruito sul cateto breve, un quadrato costruito sul cateto lungo, e quattro triangoli eguali a quello di partenza (di colore viola).

Lo stesso quadrato (perché il lato è sempre eguale alla somma dei cateti) può essere spezzettato in modo diverso, se sui lati segniamo i cateti lunghi e quelli brevi in ordine differente, cioè cateto lungo, cateto breve, cateto lungo, cateto breve eccetera in successione, due per lato.

(quattro triangoli) + (quadrato del cateto breve) +(quadrato del cateto lungo)

( quattro triangoli )+ (quadrato dell'ipotenusa)

Vediamo che così facendo il quadrato si scompone in un quadrato costruito sull'ipotenusa e quattro triangoli eguali a quello di partenza.

Possiamo quindi scrivere:

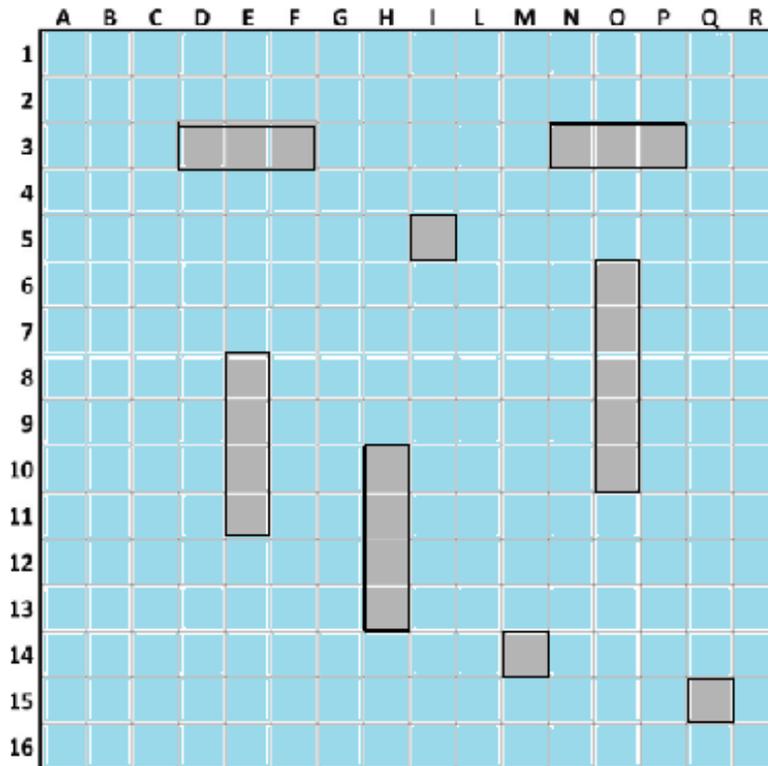
(quattro triangoli) + (quadrato del cateto breve) +(quadrato del cateto lungo) =
( quattro triangoli )+ (quadrato dell'ipotenusa)

I quattro triangoli, che sono eguali, li possiamo sottrarre sia a destra che a sinistra, ed il teorema di Pitagora è dimostrato.

## XLII.  NUMERI E DISEGNI.

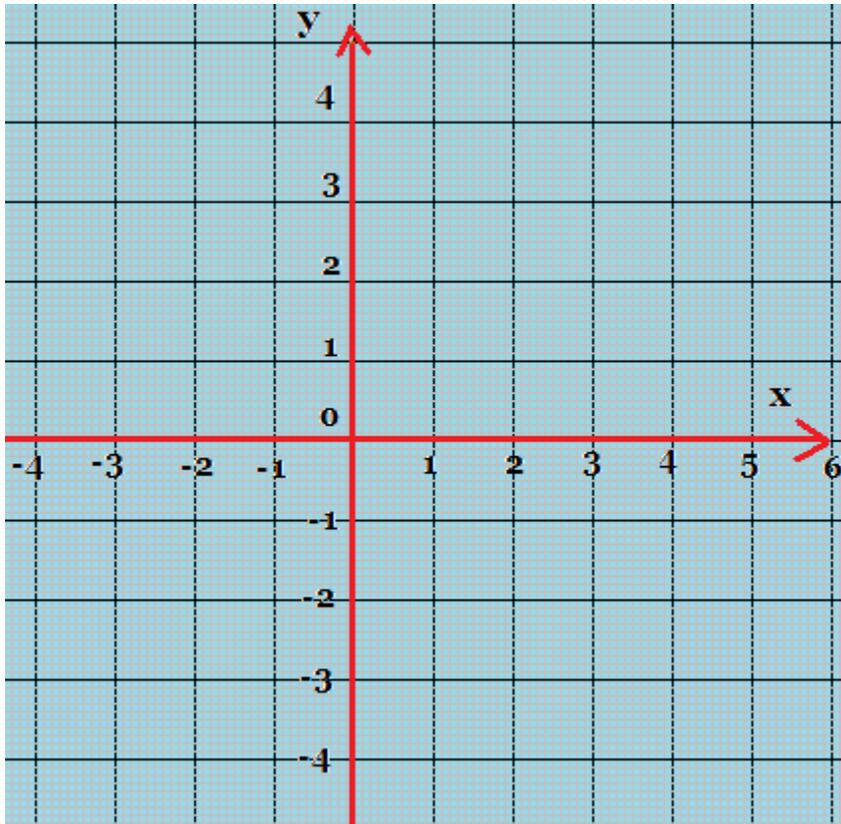
Renato Descartes (che da vecchio era un po’ più bruttino)

Nel 1600 un certo Descartes o Cartesio scoprì che mettendo insieme numeri e grafici si sarebbero potuti risolvere problemi più difficili di quelli fino ad allora risolti. Si potevano infatti combinare due vantaggi:
1) una figura dice più di cento parole,
2) sui numeri possiamo eseguire le quattro operazioni, ma sui disegni no – o almeno non così facilmente.
Quindi se combiniamo nel modo giusto numeri e figure dovremmo avere entrambi  i vantaggi.

Il concetto non è distante da quello della “battaglia navale”.

Nella battaglia navale si usano di solito numeri e lettere per indicare righe e colonne, in modo da non confondersi. Lo schema dunque presenta qualche vantaggio, tanto è vero che, con gli opportuni aggiustamenti, è anche usato quasi ovunque per il gioco degli scacchi.
Però noi non sappiamo bene, per esempio, la distanza tra I ed L. Se usassimo uno schema inglese, certamente tra I e L ci sarebbero anche J e K.
Usando numeri, che vanno bene anche agli Inglesi, tanto per le righe quanto per le colonne, avremmo altri vantaggi, ma dovremmo fare la convenzione che il primo numero indichi le colonne, il secondo le righe (o viceversa, ma Cartesio preferì così).

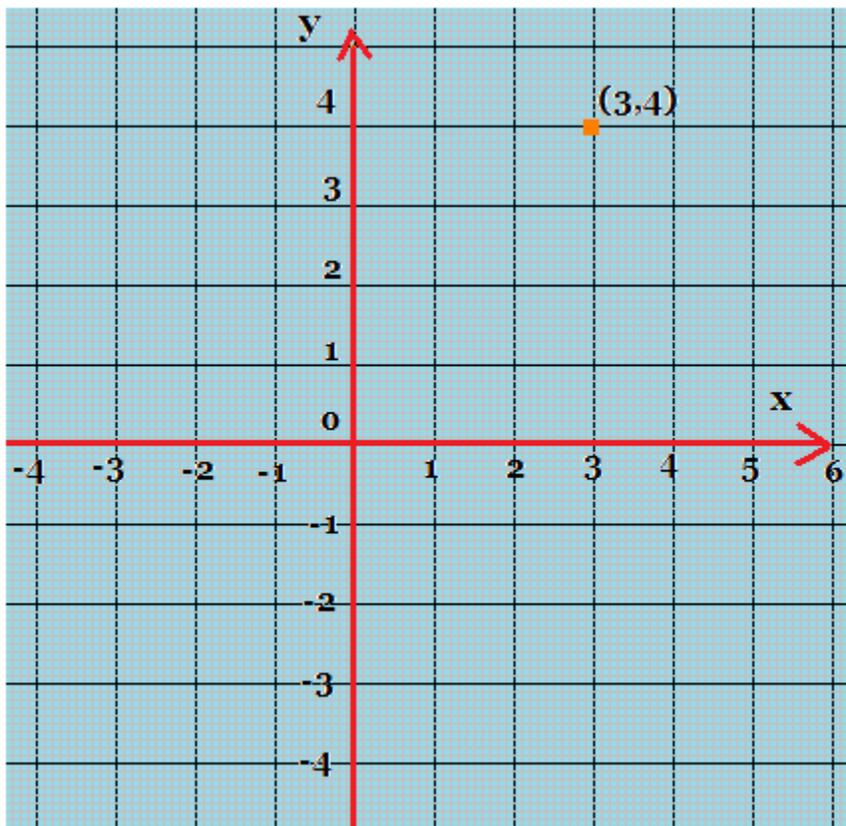
La casella 3C sarebbe ora indicata come (3,3), la 14M sarebbe ora (11,14) e via dicendo.

I numeri che indicano le nostre caselle sono numeri interi. Potrebbe aver senso lasciare perdere la divisione in caselle? Potrebbe aver senso il Punto (1.5, 3.7), che sarebbe comunque inesprimibile con numeri e lettere come la battaglia navale?

Allora, per prima cosa si prende il solito foglio di carta millimetrata e si tracciano in mezzo al foglio due rette perpendicolari, su cui si indicano, per esempio, i centimetri. Tradizionalmente i due assi hanno nome x (quello orizzontale) e y (quello verticale).

Scegliamo un punto qualunque.

Andando a leggere sull'asse verticale la "coordinata y" del punto troviamo 4, e leggendo la coordinata x sull'asse orizzontale troviamo 3. Ad ogni punto sono così associati due numeri x,y che identificano quel punto e solo quel punto. Per convenzione, il primo numero è detto *ascissa* del punto, il secondo l'*ordinata*. I due sono le *coordinate*.

Quando si gioca a battaglia navale si usano delle coordinate più o meno così. La differenza, appunto è che per battaglia navale le coordinate sono unicamente numeri interi positivi.
Esercitatevi a leggere le coordinate di altri punti.
Tra l'altro hanno senso anche i numeri negativi. Infatti:

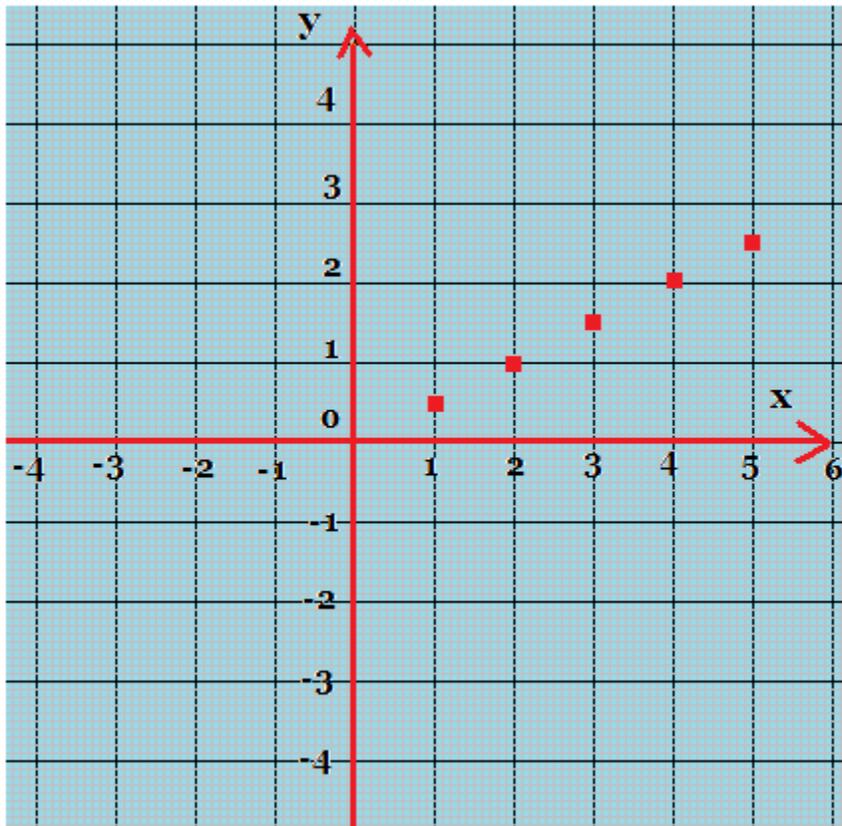
Nel quadrante Nord-Est, ascisse e ordinate sono positive.
Nel quadrante Nord-Ovest, le ordinate restano positive, ma le ascisse sono negative.
Nel quadrante Sud-Ovest, ascisse ed ordinate sono negative.
Nel quadrante Sud-Est le ordinate sono negative e le ascisse positive.

Adesso supponiamo di prendere una formula:

$$y = \frac{1}{2} x$$

Che significa?

Significa che tutte le volte che diamo un valore a x, troviamo un valore per y dato dalla metà di x. Possiamo fare una tabellina ordinando i valori delle x.

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 13 |

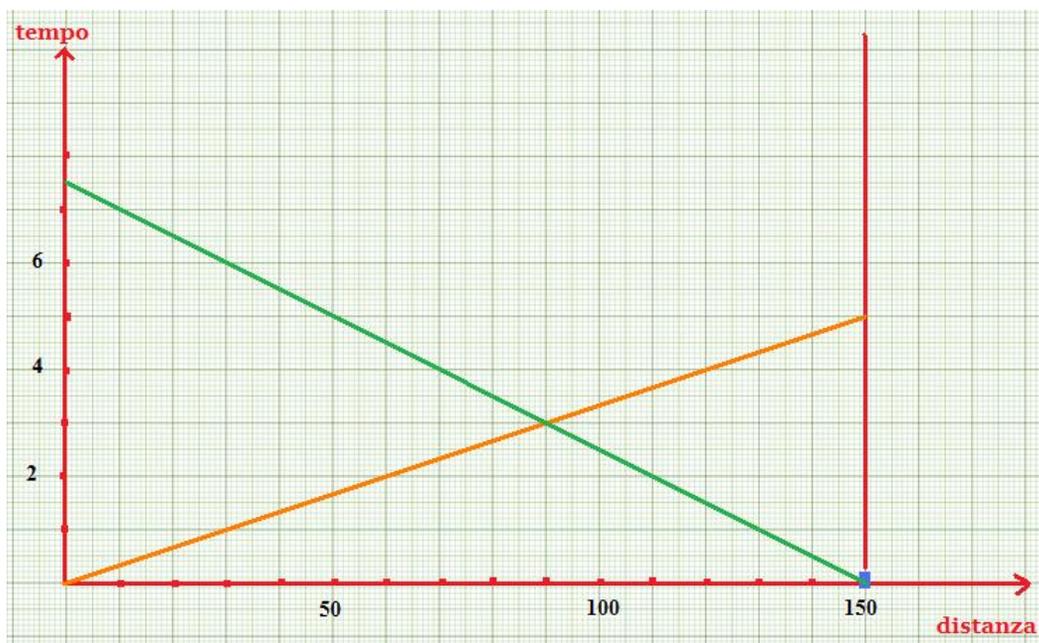
Come va a finire col nostro diagramma?

La tentazione di tracciare una retta attraverso quei punti arancione e trovare quale y corrisponde a varie x (per esempio -1, -3, 2.7 ), bisogna dirlo,  è fortissima.

Abbiamo intanto incontrato una “Funzione” (ne abbiamo già incontrate diverse, se siete stati attenti). Ricordo che un mio libro di matematica elementare aveva un capitolo dal titolo “Il concetto di funzione”. Il fatto che un capitolo intero avesse questo titolo metteva in tutti una certa soggezione, come se si trattasse di qualcosa di straordinariamente complicato. In questo libro noi incontreremo sono funzioni di una variabile. Queste sono relativamente semplici: noi avremo a che fare unicamente con coppie di numeri. Quello che importa perché possiamo parlare di funzione f(x) è che ad un numero x sia in qualche modo associato un numero y, che chiameremo “funzione di x” e scriveremo  f(x).  Questa associazione per noi potrà  risultare da una formula matematica, da una curva tracciata sul grafico, o sarà il risultato di determinati calcoli. Ma sempre, data una certa x dovremo saper ricostruire la y, o guardando la tabella, o ispezionando il diagramma o facendo quei determinati calcoli. Il legame fra la variabile indipendente, che qui chiamiamo x, e la variabile dipendente o funzione, che qui chiamiamo y, è a doppio filo. Se nella tabella guardiamo prima la y , se nel diagramma scambiamo gli assi, se i calcoli li facciamo in un altro ben determinato modo, data la y sapremo sempre (o quasi) ricavare la x. La y diventa così  la variabile indipendente e la x la funzione di y o variabile dipendente.  In generale y = f(x) è un modo generico di indicare questo legame fra y e x.
Noi abbiamo già incontrato i **logaritmi**, cioè la funzione y = log(x). Abbiamo anche visto modi

complicati di estrarre un logaritmo. Però non si scappa : $\log_{10}(2) = 0.30103\ldots$
Un'altra funzione è la somma dei quadrati dei numeri interi positivi. Qui abbiamo visto la tabella (f(0)=0, f(1)= 1, f(2)= 5, f(3)= 14 eccetera, e anche la formula:

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Questa funzione, così come l'abbiamo incontrata, è definita solo per i numeri interi positivi. Per gli altri non esiste.
Lo stesso vale per la funzione fattoriale, che abbiamo indicato come n!, ed è definita solo per numeri interi positivi (anche se non è mancato chi l'ha estesa a numeri non interi positivi).
E infine, il nostro diagramma y = ½ x è una funzione (che sul diagramma è rappresentata da una retta che passa per l'origine).

Vediamo un po' la storia dei due treni che si corrono incontro. Riusciamo a disegnare i loro due percorsi nel tempo?
Sull'asse x mettiamo le distanze, 10 km per centimetro. Sull'asse y mettiamo i tempi misurati in ore. Cambiamo nome all'asse, e chiamiamolo t (=tempo).
A 15 cm mettiamo la fine del percorso, una linea verticale.

Possiamo disegnare la linea arancione che dice come si muove il treno che va a 30 km/ora sapendo che passa per i punti (30km, 1 ora), (60 km, 2 ore), (90 km,3 ore) etc. fino a (150 km, 5 ore). Se poi ricordate che per due punti passa una sola retta, vuol dire che la retta può essere identificata da due punti qualsiasi, per esempio (0,0) e (30, 1).
Disegnare il come si muove l'altro treno, retta verde, non è difficile, perché lo si fa partire dal punto (150, 0) poi si nota che dopo un'ora è ha fatto 20 km verso sinistra, P(130,1), e dopo un'altra ora ha fatto 40 km P(110,2).
Quest'altra retta raggiunge l'asse y al punto (0, 7.5).
Guardando le due linee vediamo subito dove si incontrano, al punto (90,3), cioè a 90 km da

sinistra, dopo tre ore.
Cioè vedete la bellezza dell'invenzione di Cartesio. Non abbiamo fatto nessun calcolo vero e proprio, ma con due punti per retta abbiamo trovato dove e quando i due treni si incontrano e quando arriverebbero a fine percorso.

Un esperto direbbe: non c'è neanche bisogno di fare il disegno.
Il primo treno segue la funzione **$x = 30\ t$**. Provate a costruire la tabella come quella fatta per $y = ½\ x$ .

| t | 0.5 | 1 | 1.5 | .. |
|---|---|---|---|---|
| x | 15 | 30 | .. | .. |

L'altro segue una funzione un po' più complicata **$x = 150 – 20\ t$.**
Fate una simile tabella.
Ma nessuna delle tabelle è necessarie.
Come si fa a sapere dove si incontrano? Si incontrano nel punto in cui x è lo stesso per due treni, quindi,

$$30t=150-20t.$$

Questa è una semplice equazione algebrica di primo grado, che molti sapranno risolvere. Se qualcuno non lo sa, basta che noti che se sommiamo 20t ai due lati, che sono eguali (perché l'abbiamo scritto), essi resteranno eguali dopo la somma, la quale ci dà:
$50\ t = 150$.
Qual è il numero che moltiplicato per 50 dà 150? Si fa la divisione e si trova 3. O, se vogliamo, dato che i due membri sono eguali, dividiamoli entrambi per cinquanta, e resteranno eguali. Troviamo automaticamente $t=3$.
Un cultore di algebra scriverebbe la $30t = 150 -20t$ in forma standard come $50t-150 =0$ e poi applicherebbe la formula risolutiva. Ma poco importa il metodo. Quel che importa è il risultato, che è sempre lo stesso.
Vorrei notare che la retta $x = 150 – 20\ t$ può essere scritta
$x + 20\ t - 150 = 0$

Cartesio indicò che tutte le rette possono essere scritte come

$$\mathbf{a\,x + b\,y + c = 0}$$

in cui a, b, c sono costanti per ogni retta, mente x e y variano, in modo da rispettare l'equazione.
Noi abbiamo visto qualche retta.

In $y = ½\ x$, abbiamo $a =1$, $b = -1/2$, $c = 0$
In $x + 20t -150 = 0$ prima cambiamo il nome di t in y, e otteniamo $20y + x - 150 =0$
E quindi $a = 20$, $b = 1$, $c = -150$.

Divertitevi, se ne avete voglia, a tracciare altre rette, con a, b, c arbitrari.
Suggerisco di provare a tracciare la $x -1 = 0$. Semplice, ma non immediata.

La scienza inventata da Cartesio si chiama geometria analitica. quelli che vi ho mostrato sono

solo i primordi.  Ma c'è un'unica cosa che vorrei ancora chiedere.

Che disegno viene fuori se scriviamo $x^2+y^2 = 4$??

Dato che noi sappiamo fare i disegni se abbiamo y dato x, dobbiamo organizzarci, magari con una calcolatrice o un programma Qbasic.

***PROGRAMMA NUMERO 6 IN QBASIC: CURVA $X^2+Y^2= 4$***

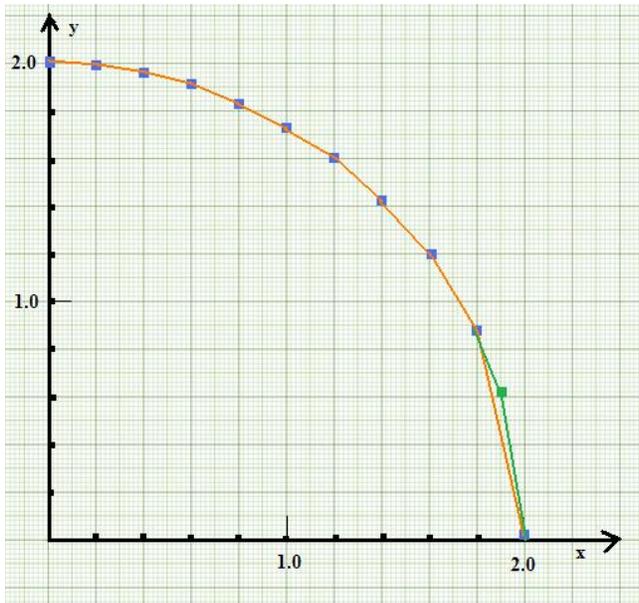
```
CLS
FOR I=1 TO 10
X=0.2*I
Y = SQRT(4-X^2)
PRINT X,Y
NEXT I
```

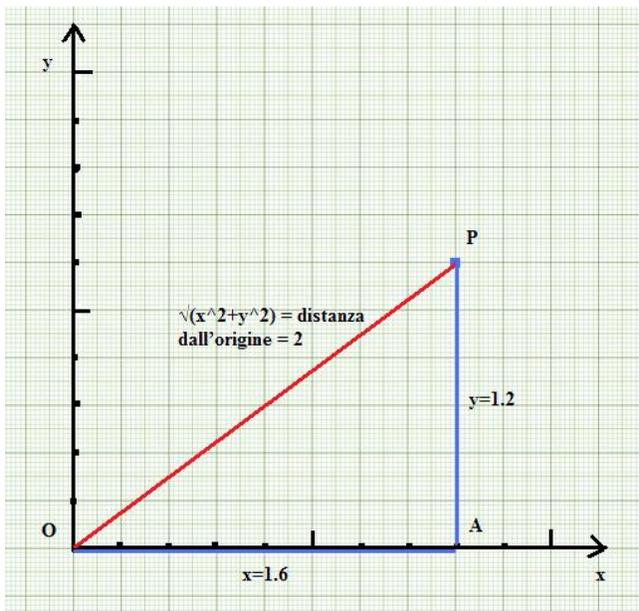
Questo programma è semplice:
Al solito, CLS è per pulire lo schermo
FOR ci dice che cominciando con I=1 e terminando con I=10 il computer farà le operazioni fino al NEXT I.  La prima di queste operazioni sarà quella di scegliere una x, che per I=1 varrà 0.2, e crescerà di 0.2 ad ogni passo successivo. La seconda operazione sarà quella di calcolare la y data la x. Ma facciamo attenzione, se $x^2 > 4$ il calcolatore rifiuta di continuare (anzi, in qualche versione di Basic rifiuterà di incominciare). Per lui la radice quadrata di un numero negativo non esiste. Per questa ragione, x va solo da 0 a 2 in 10 passi di 0.2.
Poi, terza operazione, chiediamo al computer di scrivere ("PRINT")  sullo schermo, in ordine, prima x e poi y.
Poi arriviamo a NEXT I (= prossima I) che ci fa passare al valore successivo di I.

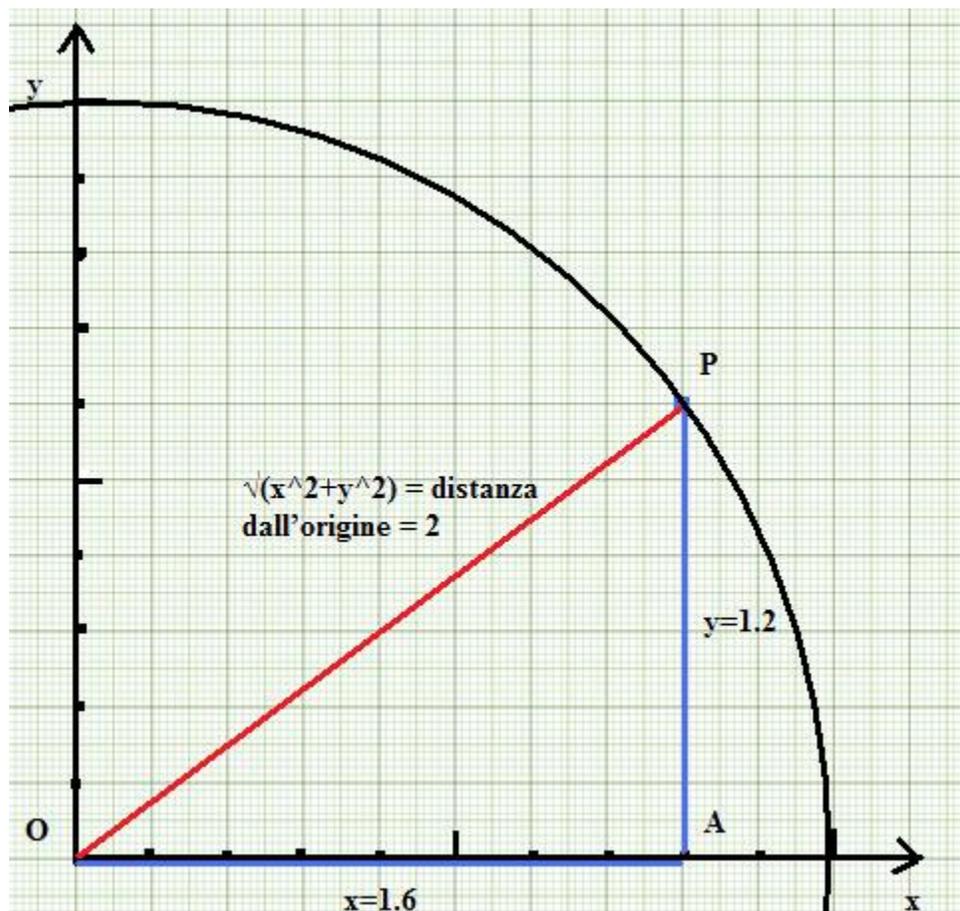
Scritto il programma, andiamo sul menu, facciamo clic su "**Run**"(= eseguire il programma), verrà giù un menu a tendina, e  clicchiamo su  "**Start**" (=partire). Se tutto va bene comparirà una nuova finestra con le due colonne di risultati, x a sinistra e y a destra.

Poi possiamo compilare la nostra tabella che ci dà i risultati di $\boldsymbol{y = \sqrt{4-x^2}}$

| x | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.99 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.73 | 1.60 | 1.43 | 1.20 | 0.87 | 0.0 |

A questo punto  facciamo il nostro bravo diagramma x,y. Se congiungiamo i punti vediamo che la curva che abbiamo disegnato assomiglia molto ad un quarto di cerchio. Solo tra x= 1.8 e  x=2 sembra che il nostro cerchio sia abbandonato.  Il problema è che vicino a x=2 la y cambia rapidamente.
Possiamo aggiungere un punto (verde), per x = 1.9, nel qual caso y = $\sqrt{4-1.9^2}$ =0.62, e vediamo che le cose vanno meglio (linea verde). Potremmo aggiungere altri punti tra 1.9 e 2.0 e troveremmo una somiglianza ancora migliore con il quarto di cerchio.

Potremmo anche ragionare un po' .

Questo $x^2+y^2 = 4$, considerato che x e y sono misurati perpendicolarmente l'uno all'altro, ci ricorda molto il nostro teorema di Pitagora, dove x e y sono i due cateti del triangolo POA, e OP è la nostra amica ipotenusa. Ma guardiamo meglio. Qui l'ipotenusa non è altro che la distanza da P a O. Quindi il quadrato della distanza da P a O è dato dalla somma dei quadrati delle due coordinate di P. Naturalmente, se il quadrato della distanza vale 4, la distanza vale 2.

Ora ragioniamo ancora un altro po' .
Se guardiamo la formula $x^2+y^2 = 4$, essa ci dice che "qualunque sia il punto P(x,y) che soddisfa a

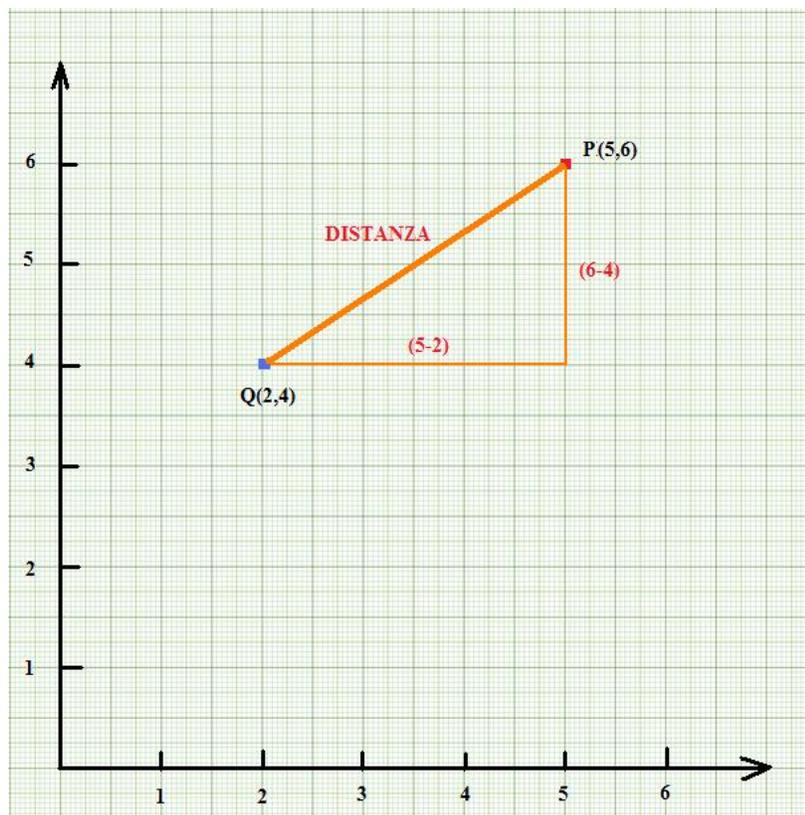
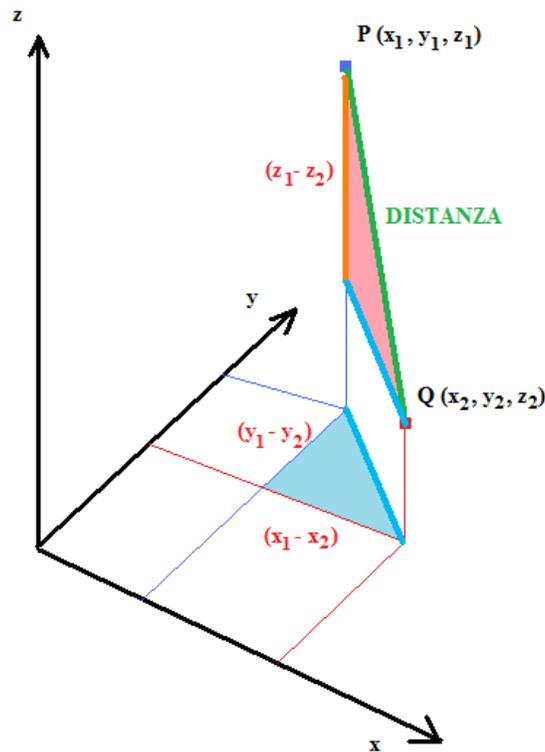
questa legge, la distanza di P da O è 2", Cioè la distanza di P dall'origine, che chiameremo d(P) vale d(P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$ =2. Allo stesso modo tutti i punti che distano 2 da O soddisfanno la nostra formula.
Ma tutti i punti che distano 2 da O non sono distribuiti a casaccio nel piano: essi siedono tutti su un cerchio di raggio 2.
Possiamo quindi trionfalmente dire che **" $x^2+y^2 = 4$ è l'equazione del cerchio di raggio 2".**

proprio come y =(1/2)x era l'equazione della retta che passa per l'origine, con una determinata inclinazione per cui y è sempre la metà di x.

Si potranno poi tracciare altre curve più complesse e studiare le loro proprietà: per ora ci basta sapere che davanti a noi c'è un campo sterminato, e che chi ne avrà la fortuna, a suo tempo lo esplorerà.

Ma un punto è essenziale, perché è usato moltissime volte.

Come abbiamo visto, "distanza del punto P(x,y) dall'origine = radice quadrata di $x^2+y^2$ ". Sacro Pitagora!.

E se volessimo la distanza di P(5,6) non più dall' origine, ma dal punto Q(2,4)?

Guardando il disegno vediamo che il quadrato della distanza è dato sempre dal teorema di Pitagora, $d^2= (5-2)^2+(6-4)^2 = 13$. Quindi la distanza sarà la radice di 13, che sappiamo calcolare con buona approssimazione. In generale la distanza tra $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ è la radice quadrata di $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

Questo sul piano. E nello spazio? Intanto nello spazio ci occorre una terza coordinata, che chiameremo z, su di un asse z perpendicolare agli assi x e y. Dalla figura vedete che se avete i due punti $P(x_1,y_1,z_1)$ e $Q(x_2,y_2,z_2)$ prima calcolate $((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)$, che è il quadrato della distanza delle proiezioni di P e Q sul piano x-y. Questa distanza tra le proiezioni diventa il quadrato del cateto di un nuovo triangolo rettangolo in cui l'altro cateto è $(z_2-z_1)$ e l'ipotenusa è la distanza in tre dimensioni di P e Q.
Quindi la distanza di due punti nello spazio è la radice quadrata di $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2)$.

Ogni tanto i matematici possono trattare meglio certi problemi inventando spazi simili al nostro, ma con più di tre dimensioni, in cui la distanza è una generalizzazione di quella che abbiamo trovato, cioè il quadrato della distanza in N dimensioni non è altro che la somma dei quadrati delle differenze delle coordinate corrispondenti. Abbiamo sempre due punti, ma con tante dimensioni.

Notate che siccome $(x_1-x_2)^2 = (x_2-x_1)^2$ (poiché "meno per meno dà più") l'ordine in cui prendiamo i punti non importa.

Ma ricordate bene, tutte le volte che vedrete la somma dei quadrati delle differenze di certe "coordinate", state probabilmente avendo a che fare con la "distanza" di due punti in uno spazio "astratto" con molte dimensioni.

Vorrei aggiungere un'ultima considerazione. Alla prima lezione universitaria di calcolo integrale e differenziale il professore ci disse "In principio era il diagramma". Noi abbiamo preso qualche modesta dimestichezza con i diagrammi. Ma questi sono, appunto, solo il principio di un campo sterminato in cui noi non ci addentreremo.

## XLIII. MAPPE DEL TESORO, PIANTE E PLANIMETRIE

Una buona percentuale di ragazzi prova interesse per le carte topografiche. Molti disegnano la pianta del loro alloggio, una mappa del tesoro, la carta del luogo in cui si trovano in vacanza. E' probabilmente un po' come avere il mondo in mano. Ma nella maggior parte di questi giochi si incomincia il lavoro direttamente disegnando, che è un po' dove il lavoro dovrebbe finire. Inoltre, solo a posteriori ci si accorge del possibile uso di una mappa, di riprodurre con esattezza anche le distanze in scala. Se è fatta bene, la nostra carta è "simile" a quello che si trova sul terreno, ma non simile solo nel senso che le somiglia. E' simile in senso geometrico, cioè nel senso che TUTTI gli angoli misurati sulla mappa sono eguali a quelli misurati sul terreno, e TUTTE le distanze sono in scala, cioè proporzionali, nel senso che, per esempio, un centimetro corrisponde a dieci metri ovunque sulla carta. Se queste sono le proporzioni, la scala è "1:1000". Cioè vale la proporzione:

$$(distanza\ sul\ \ terreno):(distanza\ sulla\ mappa) = \ 1000:1$$

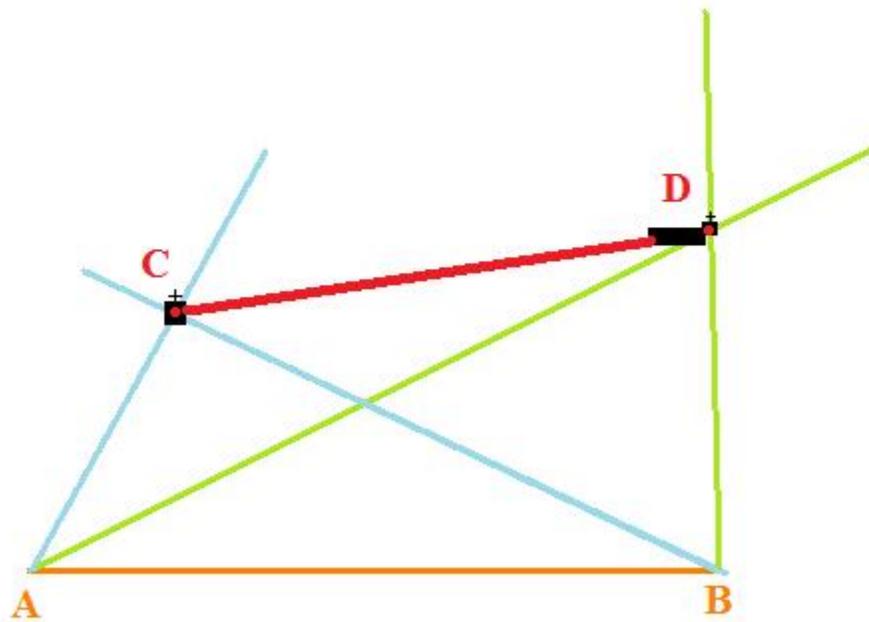
Che vuol dire che se sulla mappa misuriamo 2.3 cm tra due case, la distanza reale è mille volte più grande, cioè 2300 cm, 23 metri.

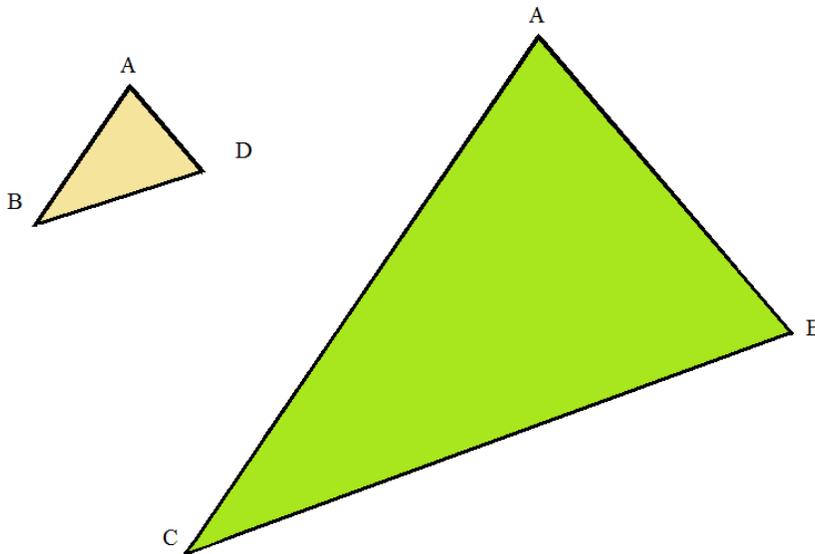
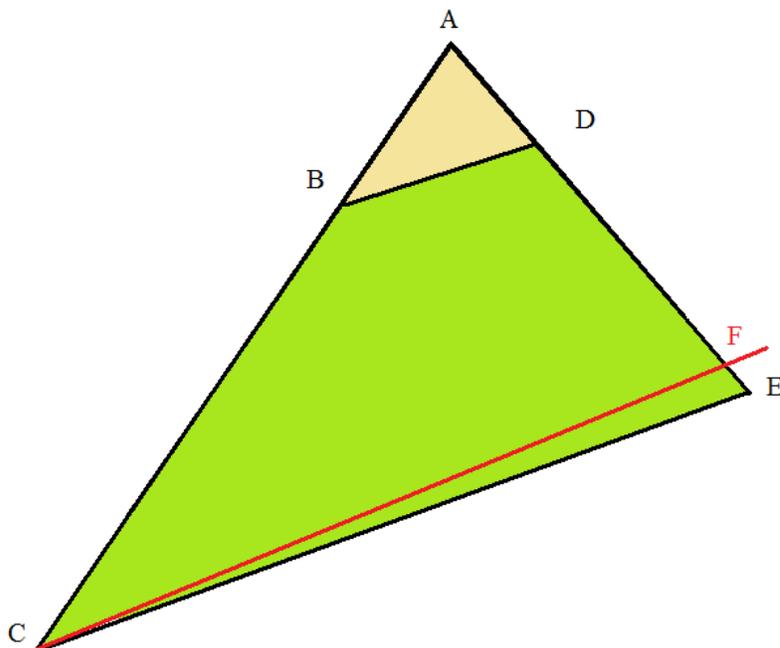
Molti cartografi in erba hanno buon occhio. In una delle prime carte che avevo fatto del territorio delle mie vacanze insieme a mio cugino, incominciando col disegno come tutti, avevamo poi trovato che il disegno era stato fatto con una certa precisione e le distanze erano effettivamente in scala. Solo che, avendo trovato la scala a posteriori, ci era venuto che un centimetro equivaleva a 13 metri, scala stranissima, con cui i conti venivano un po' più complicati.

La tavoletta pretoriana è uno strumento inventato nel 1600 per costruire mappe in scala senza eccessiva fatica.
Per prima cosa si stabilisce la scala che ci pare opportuna, per esempio 1:1000. Poi si misura con precisione, per esempio con una corda misurata, una "base", magari di 100 metri, e la si traccia, in scala, sulla nostra mappa. Sulla carta sarà ovviamente lunga dieci centimetri. Poi, piazzandoci **(sul terreno!)** agli estremi della base, con una bussola o con un goniometro si stabiliscono gli angoli che formano con la base le direzioni di determinati oggetti visibili e riconoscibili dai due estremi della base. Si riportano angoli e direzioni sulla mappa e all'incrocio delle direzioni misurate dai due estremi si segnano i punti corrispondenti ai punti sul terreno. Oh sorpresa, le distanze fra questi punti disegnati sulla mappa risulteranno in scala. Cioè se due punti distano cinque centimetri sulla mappa, i punti sul terreno disteranno cinquanta metri. Magico. Una volta disegnata una decina di punti (più ce n'è e meglio è), eseguiamo il compito finale, di disegnare la mappa usando questi punti come riferimento.

Ma perché anche la distanza CD dovrebbe essere in scala? Due triangoli sono simili se hanno angoli eguali e lati proporzionali. Tuttavia si può dimostrare che triangoli che hanno un angolo eguale ed i lati che lo formano in proporzione sono simili. E' il nostro caso. Nel triangolo ACD i lati AC, AD sono proporzionali a quelli sul terreno, gli angoli da essi formati in A, sulla tavoletta e sul terreno, sono eguali.

A
B

TAVOLETTA PRETORIANA
C
D
A
B

E’ prudente non scegliere una base troppo piccola rispetto all’area che vogliamo disegnare. Una base di 100 metri va bene fino a distanze di circa duecentocinquanta metri dalla base. Poi, o abbiamo dei goniometri molto precisi, o ci facciamo in qualche modo una base più lunga, usando magari la prima base tracciata, nel senso che con la prima base lunga cento metri ci troviamo due punti che sulla mappa distano venti centimetri, cioè 200 metri e li usiamo come estremi della nuova base. Non c’è più bisogno di misurare con una corda la distanza fra questi due punti, se ci fidiamo delle nostre misure e dei nostri disegni in scala.

Se proprio occorre dimostrare che il triangolo sulla mappa, ABD, è simile al triangolo sul terreno ACE, avendo eguali gli angoli in A e in proporzione i lati AB e AC, e i lati AD e AE, di modo che anche BD è proporzionale a CE, ecco la dimostrazione:

Per prima cosa sovrapponiamo i  due triangoli  in modo che abbiano l'angolo in A in comune. Ciò si può fare perché angoli eguali vuol appunto dire che si possono sovrapporre.

Perché i triangoli siano simili basta dimostrare che gli angoli corrispondenti (per esempio quelli in D e in E) sono eguali, o, se vogliamo, che BD e CE sono due parallele. Supponiamo che non siano parallele. Allora per C possiamo tracciare la vera parallela (rossa) a BD. Ma  i lati erano in proporzione,

EA : DA = CB : CA, cioè

$$EA = (CB \cdot DA)/CA$$

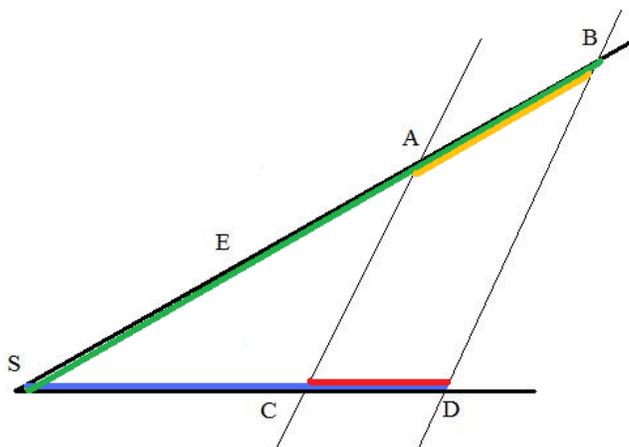
D'altra parte, per il teorema di Talete, di due parallele che tagliano due rette, abbiamo  FD : DA = CB: BA, cioè, di nuovo,

$$FA = (CB \cdot DA)/CA$$

Quindi FA = EA, il punto F coincide col punto E,  la retta CE coincide con la CF, che abbiamo costruito apposta parallela a BD,  e quindi  BD e CE sono parallele.

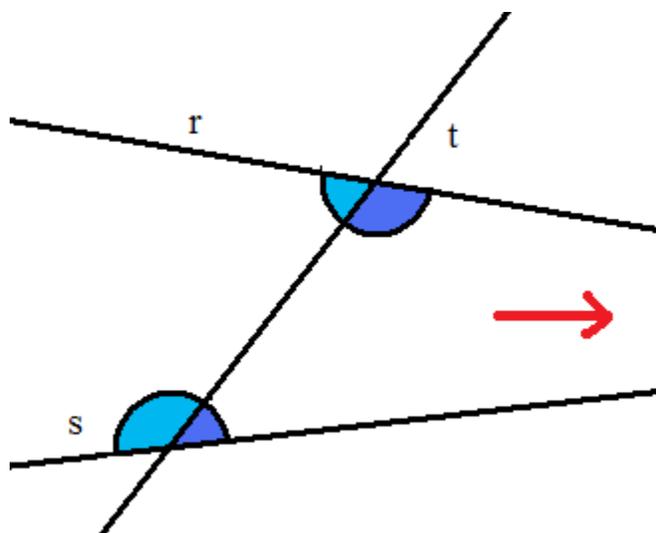
Dobbiamo anche dimostrare il teorema di Talete? Probabilmente sì.  La dimostrazione ci offrirà l'occasione di un piccolo ripasso in geometria elementare.

## XLIV. TEOREMA DI TALETE (per chi non lo ricorda).

In matematica elementare, dopo il teorema di Pitagora, non c'è teorema più utilizzato del teorema di Talete. In compenso, mentre molti possono dare sui due piedi una o più dimostrazioni del Teorema di Pitagora, sono assai pochi quelli che possono dare la dimostrazione del Teorema di Talete senza doverci pensare alquanto. In effetti la dimostrazione si basa su un certo numero di altri teoremi.
Noi vogliamo dimostrare che, data la figura:

Vale la relazione:

$$\frac{SD}{CD} = \frac{SB}{AB}$$

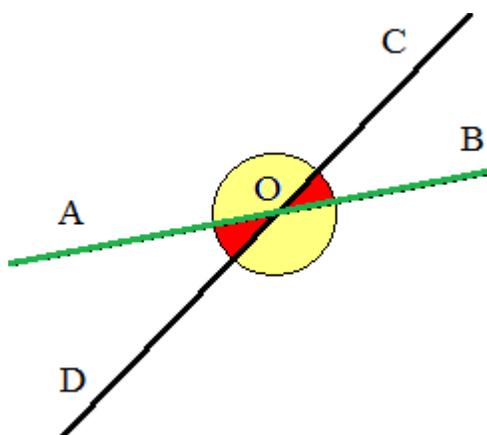
Partiamo dai principi primi, cioè cerchiamo di seguire il procedimento di Euclide.

Per prima cosa consideriamo il famoso "Quinto Postulato" nella seguente formulazione, che è poi precisamente la formulazione originale.
*Se due rette r,s formano con una trasversale t angoli coniugati* (blu) *non supplementari* (cioè la cui somma non è un angolo piatto, 180 gradi), *esse si incontrano dalla parte della trasversale da cui la somma dei due angoli coniugati è minore di un angolo piatto* – in questo caso dalla parte degli angoli blu-scuro.

Per Euclide, questa affermazione o “postulato”, era evidente, o, almeno, non era dimostrabile.

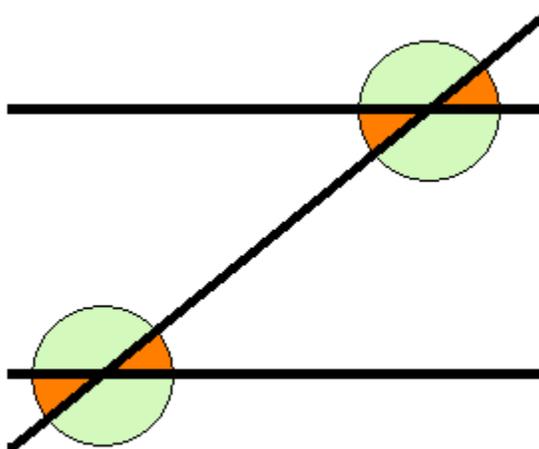
Ora, per definizione, due rette sono parallele se non si incontrano mai. Ciò significa, in base al postulato, che se una trasversale taglia due parallele, gli angoli coniugati, sia i due azzurri che i due blu, sono supplementari, cioè la loro somma è un angolo piatto, 180 gradi. Se non lo fossero, le due rette si incontrerebbero dalla parte della trasversale in cui la somma degli angoli (blu o azzurri) è minore di 180 gradi. .

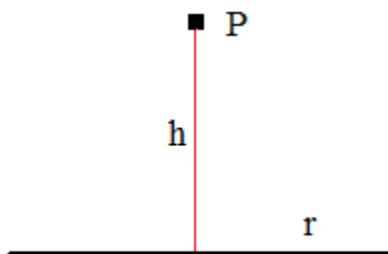
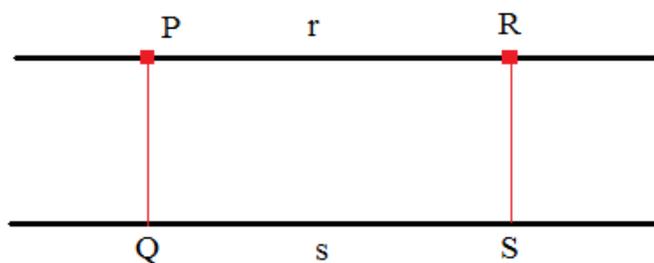
Se questo è vero, abbiamo ora diverse proposizioni che si possono dimostrare (Euclide aveva una siffatta testa per cui tutto quello che *poteva* essere dimostrato *doveva* essere dimostrato).

Due rette parallele formano con una trasversale varie coppie di angoli eguali. Alcuni sono eguali anche senza invocare il postulato delle parallele: per esempio, se due rette si incrociano, la somma di un angolo rosso più uno giallo è necessariamente 180 gradi. Difatti, scelta una retta come base, per esempio la retta verde, poco importa con che inclinazione la seconda retta (nera nel disegno) la tagli nel punto O: l’angolo AOB, formato dalle due semirette OA e OB, è sempre un angolo piatto.

:

Da questo segue pure che gli angoli opposti (i due rossi o i due gialli nel disegno) sono sempre eguali, in quanto - per esempio – l’angolo COB è supplementare di COA (cioè la loro somma è

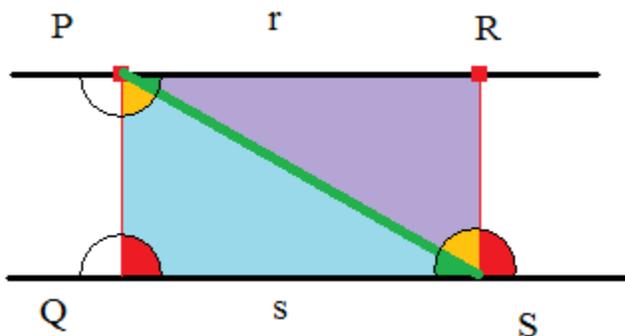
un angolo piatto) rispetto alla retta verde , mentre l'angolo DOA è supplementare dello stesso COA rispetto alla retta nera. Quindi COB = DOA.

Le altre eguaglianze derivano dal fatto che per il postulato di Euclide se le due rette sono parallele la somma di un angolo verde più un angolo arancione è sempre 180 gradi, qualunque coppia si scelga.
Gli angoli eguali sono colorati con lo stesso colore nel diagramma che segue. E' un utile esercizio cercare di vedere perché le eguaglianze valgono, grazie al piccolo arsenale di proprietà che abbiamo creato.

Quindi vale, ad esempio, il teorema che una trasversale che tagli due parallele forma angoli alterni interni eguali (angoli arancione, eguali tra loro, e angoli verdi, eguali tra loro).

Introduciamo un altro concetto, quello di distanza. La distanza da un punto P a una retta r è la lunghezza del segmento h di perpendicolare tracciato dal punto alla retta.

La distanza tra due parallele (r, s) è la distanza tra un punto qualsiasi di una di esse, per esempio s, e l'altra, in questo caso r.

Dato che abbiamo detto “punto qualsiasi”, dobbiamo dimostrare che tutti questi segmenti di perpendicolari sono eguali, cioè PQ = RS.

Va detto a questo punto che l’ordine classico, seguito da Euclide, per dimostrare i teoremi della geometria piana elementare prevede che i triangoli e i criteri di eguaglianza dei triangoli, che abbiamo dato a suo tempo, siano trattati prima di questo teorema sulle parallele.

Dimostrare che i segmenti di perpendicolari sono eguali diventa un gioco se conosciamo i criteri di eguaglianza dei triangoli.
Considerando allora i due triangoli azzurro e viola vediamo che si tratta di due triangoli rettangoli, il primo perché così l’abbiamo fatto, il secondo perché l’angolo PRS è alterno interno con l’angolo retto (rosso) in S, dato che siamo nel caso di due parallele r,s tagliate dalla trasversale, che è la perpendicolare.
Si noti che i due angoli verdi sono alterni interni e quindi sono eguali essendo le rette r e s parallele, tagliate dalla trasversale verde.

Ma i due triangoli rettangoli, avendo un lato eguale (è addirittura in comune), oltre agli angoli, sono eguali.

Quindi PQ = RS come si doveva dimostrare.
Non solo, ma ne viene anche che QS = PR.

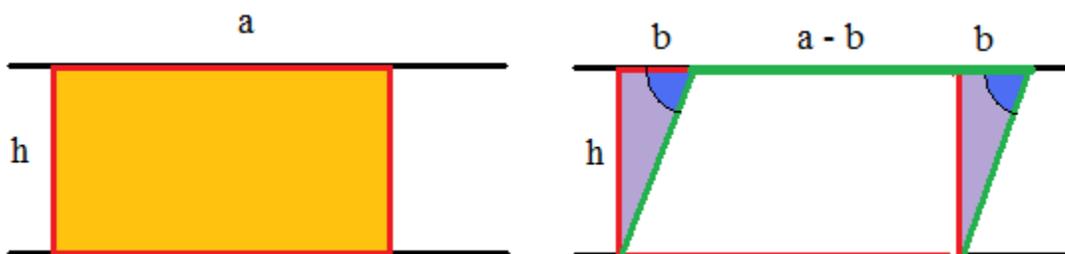
Qui bisogna introdurre il concetto di area, che non è banale ed è sovente mal introdotto o semplicemente ignorato in vari testi elementari. Si danno le formule, ma non si sa come ci si arriva. Per me il concetto di area come misura di una superficie o come numero in qualche modo associato ad una superficie di una data forma, è primitivo.

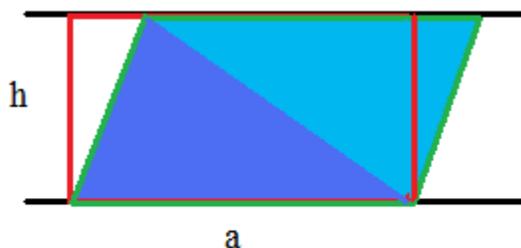
Per incominciare direi che “area” di una superficie delimitata è un numero associato a questa superficie che indica a quanti quadrati unità è equivalente. E per quadrato unità intendiamo quello che per lato ha l’unità di lunghezza.

Consideriamo quindi l’area del quadrato, che è per definizione il quadrato del lato. Per esempio, nel caso in figura, il lato è quattro unità di lunghezza e l’area è 16 unità di area, ciascuna delle quali è un quadrato di lato 1.

Di qui si vede che l’area di un rettangolo sta all’area del quadrato di eguale altezza come il rapporto delle basi.
In altre parole, l’area del rettangolo 6x4 sta all’area del quadrato 4x4 come 6:4. Infatti l’area del rettangolo vale 24 e quella del quadrato vale 16, e 24:16 = 6:4. O, se vogliamo, l’area del rettangolo A = (6 x 16)/4.

Tutto questo lo si può vedere abbastanza agevolmente perché quadrati e rettangoli possono essere scomposti in quadratini. Naturalmente occorre che si possa trovare una lunghezza di cui tanto la base del quadrato quanto quella del rettangolo siano multipli, cioè che i due lati siano “commensurabili”. Potrebbero darsi dei casi in cui non lo sono (per esempio scegliendo la base del rettangolo lunga quanto la diagonale del quadrato), ma lasciamo lo studio di questo caso a un testo di geometria.

Il passo successivo, trovata l’area del rettangolo, è quello di trovare l’area di un parallelogramma, un rettangolo sbilenco. Ma sbilenco fino ad un certo punto: deve avere i lati a due a due paralleli, altrimenti non è un parallelogramma. E’ comunque facile vedere che l’area di un parallelogramma è eguale all’area di un rettangolo di eguale altezza, che è la distanza costante tra due parallele.

Infatti l’area del parallelogramma a contorno verde (nella figura a destra) è eguale a quella del rettangolo rosso meno il triangolo viola di sinistra, più il triangolo viola di destra. I due triangoli sono eguali perché sono rettangoli e hanno eguali il lato h e tutti gli angoli. Infatti i lati del parallelogramma sono per definizione a due a due paralleli, da cui segue l’uguaglianza degli angoli blu. Quindi l’area del rettangolo a contorno rosso a sinistra è eguale all’area del

parallelogramma a contorno verde a destra.  Ma l’area del rettangolo è data da (base) x (altezza), e ciò vale anche per il parallelogramma di egual base intendendo come base la lunghezza dei due lati su una coppia di parallele e per altezza la distanza delle due parallele.
Gli stessi triangoli viola, essendo eguali, ci dicono che i lati del parallelogramma sono a due a due eguali.
Ora, l’area di un triangolo è la metà di quella di un parallelogramma opportuno, cioè disegnato come in figura, su due lati e un angolo del triangolo.

I due triangoli, azzurro e blu, sono eguali, perché hanno un lato comune, eguali i lati obliqui del parallelogramma, ed eguali le basi, nonché, per le proprietà delle parallele tagliate da una trasversale, eguali tutti gli angoli. Ce n’è fin troppo. Quindi l’area del parallelogramma è data dalla somma delle aree di due triangoli eguali. E dato che l’area del parallelogramma è (base)x(altezza), quella di uno qualsiasi dei due triangoli è **(base) per (altezza) diviso 2**.

Facilmente si vede che le  aree di due triangoli di eguale altezza sono proporzionali alla lunghezza delle basi.

$$A_1 = b_1 \times \frac{h}{2}$$

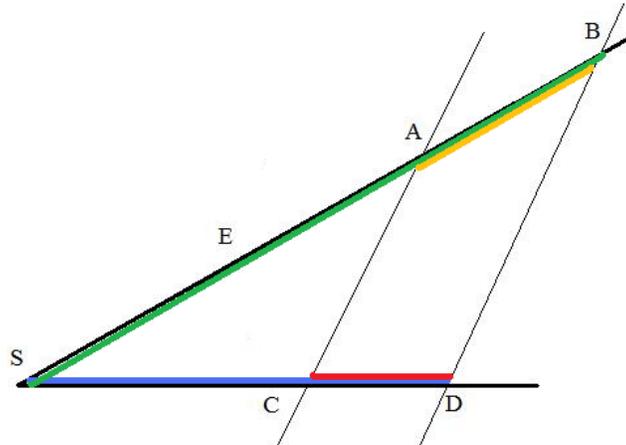
$$A_2 = b_2 \times \left(\frac{h}{2}\right)$$

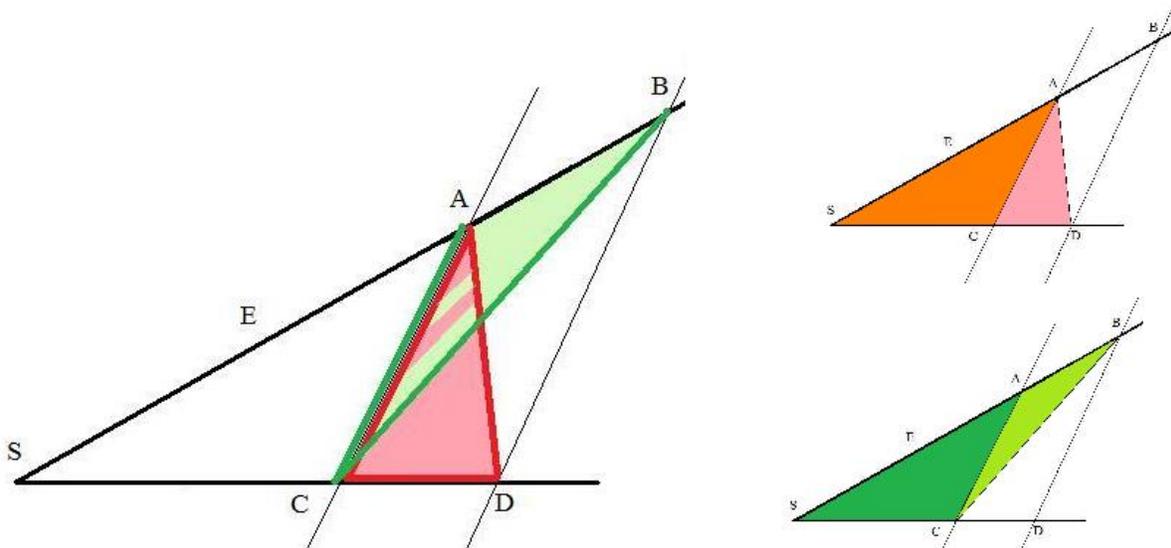
Dividendo membro a membro:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Nella geometria delle aree, l’area fondamentale è quella del triangolo, base per altezza diviso due. Tuttavia, come si è visto,  questo  non è un risultato immediato

Siamo così arrivati a Talete.

Primo tempo:

Si traccino anzitutto i due segmenti BC e AD.

Le aree dei due triangoli CDA e ABC sono eguali, perché i due triangoli hanno la stessa base e l'altezza è data dalla distanza fra le due parallele AC e BD.
Ne segue che sono anche eguali le aree dei triangoli SCB e SAD.

L'area totale di SCB e SAD è data da un'area comune SAC + due aree ACB e CAD, che sono eguali. Quindi il rapporto fra l'area comune e quella di uno dei triangoli aggiuntivi è uguale al rapporto fra l'area comune e l'altro triangolo aggiuntivo.

$$\frac{A(SCA)}{A(CAD)} = \frac{A(SCA)}{A(CAB)}$$

Ed i rapporti fra le aree totali e le aree aggiuntive sono eguali

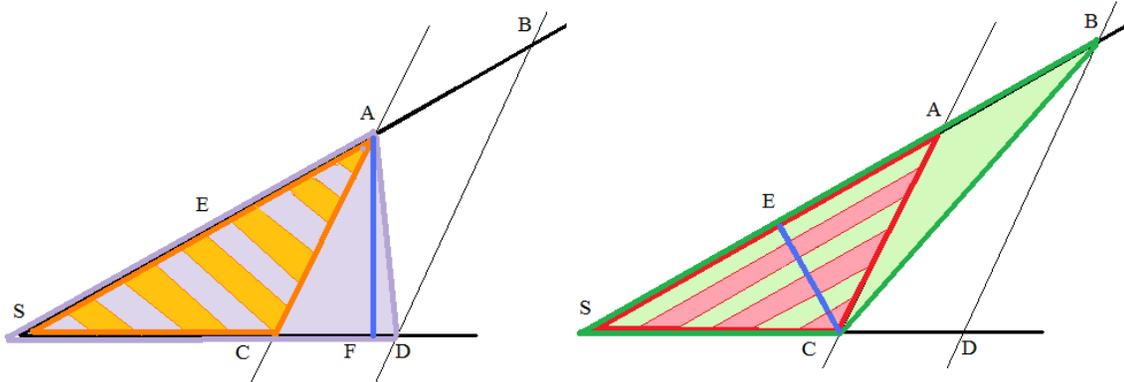
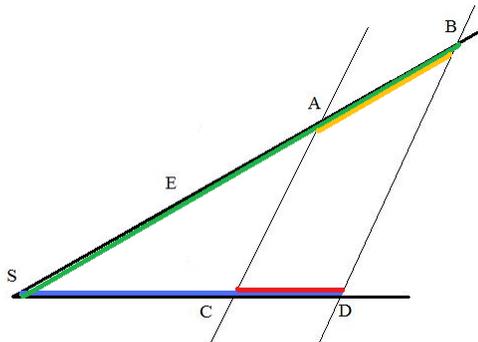
$$\frac{A(SDA)}{A(CDA)} = \frac{A(SBC)}{A(ABC)}$$

Secondo tempo:

Nella prima eguaglianza, i due triangoli SCA e CDA  hanno la stessa altezza,e quindi  le loro aree sono proporzionali alle basi. Allo stesso modo,  le aree dei triangoli SAC e ABC sono proporzionali alle basi, per cui l'eguaglianza diventa:

$$\frac{SC}{CD} = \frac{SA}{AB}$$

Nella seconda eguaglianza, i due triangoli SDA e CDA  hanno la stessa altezza,e quindi  le loro aree sono proporzionali alle basi. Allo stesso modo,  le aree dei triangoli SBC e ABC sono proporzionali alle basi, per cui l'eguaglianza diventa:

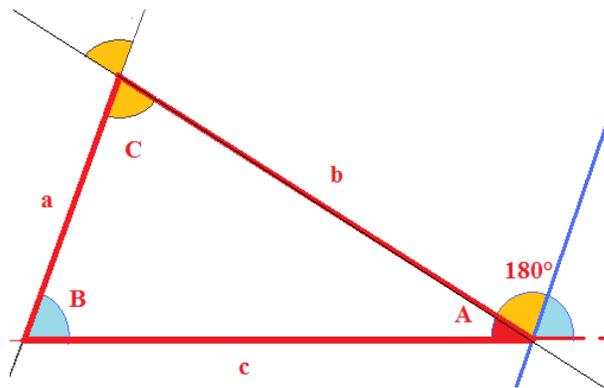
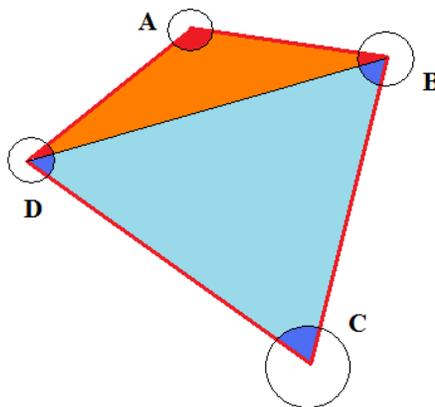
$$\frac{SD}{CD} = \frac{SB}{AB}$$

Che era quello che volevamo dimostrare.

## XLV.  TRIGONOMETRIA

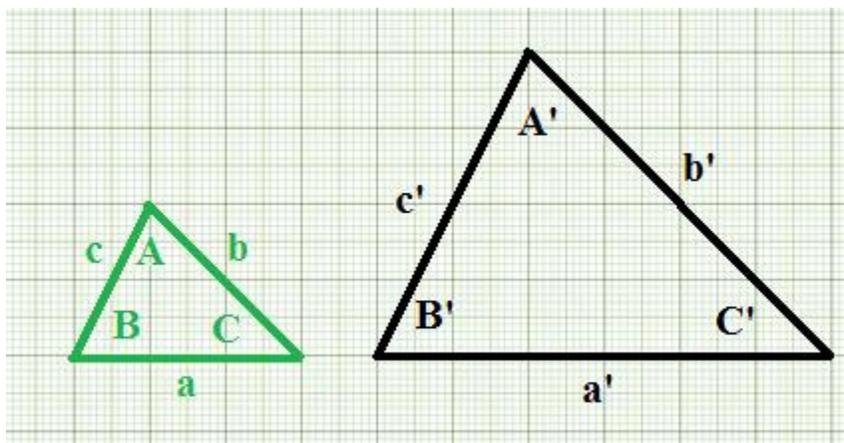
Con  carta millimetrata, righello e goniometro, possiamo ricavare risultati abbastanza precisi. Ma se i calcoli devono essere ancora più precisi, dobbiamo ricorrere ad una branca della matematica pura e dura, che ha un nome ostico, la “Trigonometria”.  Con le formule che la trigonometria ci mette a disposizione, possiamo calcolare distanze da dove siamo a punti inaccessibili, distanze tra due punti inaccessibili, dislivelli, etc. Possiamo anche scavare tunnel precisi, prodigio dell’ingegneria dell’Ottocento. Se voi guardate da lontano un tunnel ferroviario vedete quanto piccoli sono l’ingresso e l’uscita rispetto alla montagna. Se incominciamo da un punto e scaviamo fin che usciamo, in qualche modo il nostro lavoro lo facciamo e da qualche parte usciremo. Basta che in qualche modo, non difficile da immaginare, manteniamo l’allineamento. Però, se vogliamo uscire in un punto preciso, il problema è un po’ maggiore. Il problema è ancora più grave se, per impiegare circa  metà tempo, scaviamo il tunnel a partire dai due estremi. Dobbiamo incontrarci con precisione di un metro o due al massimo, se non vogliamo rischiare di avere alla fine due tunnel nel doppio del tempo. Ma, se vogliamo ottenere questa precisione, vediamo subito che, anche nell’ipotesi più semplice di scavare in piano, abbiamo bisogno di una mappa molto precisa, perché, per esempio, in un tunnel di un km vogliamo una precisione dell’un per mille. Quindi, se disegniamo in scala un tunnel di dieci cm, un cm per 100 m, dobbiamo andare a un decimo di millimetro di precisione. E non parliamo della precisione con cui dobbiamo misurare gli angoli. Dunque i nostri disegni in scala difficilmente raggiungono la precisione voluta e dobbiamo usare l’artiglieria pesante. Però i  disegni in scala possono dare idee su come procedere.

Il nome trigonometria significa “misura dei triangoli”.  Noi sappiamo – o pensiamo di sapere - che la geometria storicamente nacque in Egitto. Una volta all’anno a quei tempi il Nilo straripava (nessuno sapeva il perché con precisione e c’erano le più diverse teorie sul soggetto) e inondava l’intera valle. Poi si ritirava. A questo punto  era difficile ricordare  i confini dei campi dei vari proprietari, i quali si mettevano a litigare, le mogli si strappavano i capelli, i bambini facevano a botte tra loro. Per calmare le acque, degli agrimensori erano  chiamati a fare le opportune misure, presumo nel fango fino al collo, in compagnia di rane ed altri animali più o meno simpatici. Però non penso che in tutto l’antico Egitto ci fosse un solo campo di forma perfettamente triangolare.  Perché dunque la trigonometria, che misura i triangoli, è così importante?

- In primo luogo tutti i poligoni regolari ed irregolari con più e più lati sono scomponibili in triangoli.
- In  secondo luogo, i triangoli hanno simpatiche proprietà che gli altri poligoni non hanno.

Per quanto riguarda questa seconda proprietà, due triangoli sono simili (lo vediamo ad occhio) se hanno  gli angoli eguali. E se hanno gli angoli eguali hanno anche i lati in proporzione. Non è così già per i più semplici poligoni dopo i triangoli, cioè i quadrangoli.  Per convincersene basta pensare ad un quadrato e ad un rettangolo, che hanno i quattro angoli eguali e in genere non hanno i lati in proporzione. Anche ad occhio non diremmo che sono simili.

E poi basta che due angoli in un triangolo siano eguali: anche il terzo lo sarà, perché sappiamo che la somma dei tre angoli (interni) vale 180 gradi. Per un quadrilatero, la somma degli angoli interni vale 360 gradi, ed occorre conoscere tre angoli per avere il quarto. La cosa non è economica: per i triangoli occorre conoscere 2/3 del totale, per il quadrilatero 3/4.
Le due dimostrazioni, se non andiamo troppo per il sottile, sono immediate.

Per la prima, basta condurre per un vertice *A* la parallela al lato opposto *a*. Quindi, per le relazioni tra gli angoli formati da due parallele tagliate da una trasversale, si vede che l'angolo di 180 gradi centrato su A è la somma dell'angolo in A più altri due che sono eguali agli angoli in B e in C. Naturalmente, questa proprietà dipende in modo critico dal fatto che esistano le parallele come noi le conosciamo. Discuteremo la validità di questo postulato un po' più avanti.

Per la seconda, basta dividere il nostro quadrilatero in due triangoli, per ciascuno dei quali la somma degli angoli interni vale 180 gradi.

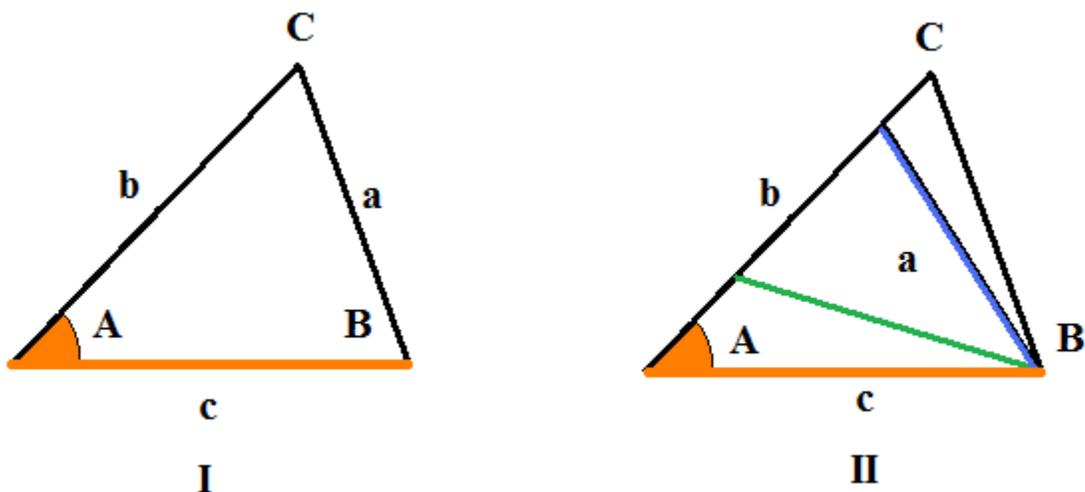
Dunque la proporzionalità dei lati fra triangoli simili è la proprietà chiave della trigonometria.

Basta guardare i due triangoli in figura per vedere che sono simili con angoli eguali e lati in proporzione. Ciò significa che se

$$\frac{a'}{a} = 2 \qquad \text{anche} \qquad \frac{b'}{b} = 2 \quad \text{e} \qquad \frac{c'}{c} = 2$$

Se poi *a* è di lunghezza 1, allora *a'* è di lunghezza due.

Ma anche se il nostro triangolo verde è su un foglio di carta normale e quello nero è in Val Padana ed ha lati lunghi chilometri, la proporzionalità permane, almeno fino a che non entri in gioco la curvatura della Terra.
Osservate intanto la comodità della notazione scelta, che è consacrata dalla tradizione: gli angoli sono le lettere maiuscole A B C, i lati le lettere minuscole a b c, ed il lato b, ad esempio, è opposto all'angolo B, e così gli altri..

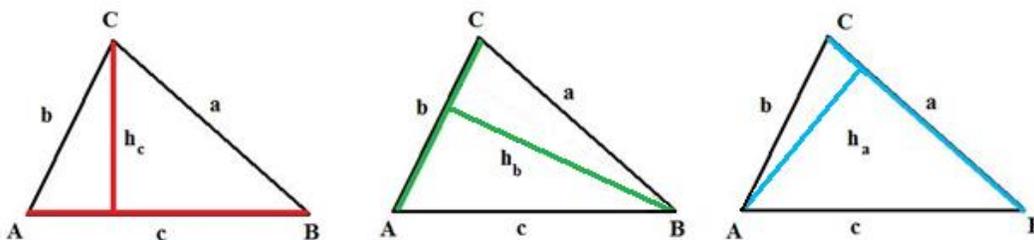
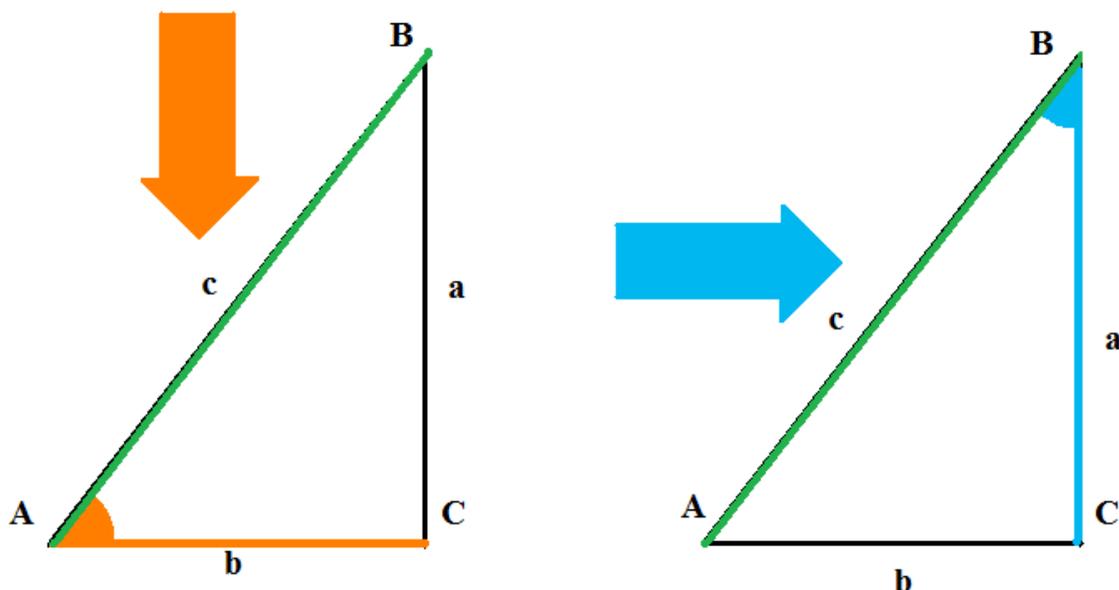
Quando dunque abbiamo triangoli di forma qualsiasi potremmo fare una tabella con almeno tre colonne in cui assumiamo che il lato noto, *c*, sia lungo 1. Questo non è d'impaccio. Semplicemente, tutte le lunghezze andranno misurate in unità c: dopo tutto, anche il metro è una lunghezza arbitraria.
In prima colonna potremmo mettere l'angolo A, in seconda colonna l'angolo B. Questi li osserviamo. Per ogni coppia di angoli potremmo poi indicare la lunghezza di *a*. La tavola potrebbe essere fatta, ma sarebbe lunga. Se la facessimo grado per grado avrebbe per ogni grado di A valori per ogni grado possibile di B, per esempio 180 x 180, in tutto 32400 righe. Infatti, come possiamo vedere dalla figura, la lunghezza *c* e l'angolo *A* non determinano il triangolo. Occorre anche l'angolo *B*.

Poi, per comodità dell'utente, potremmo anche indicare il lato *b*, che resta determinato dagli angoli A e B, e da *a* e *c*.

Così, per il triangolo I, assumendo che il lato *c* valga 1 e che l'angolo in A valga 45°, il lato *a* varrebbe 0.8, ma solo perché B vale circa 69°.  La nostra tabella dovrebbe quindi avere una riga come segue:

| Angolo A | Angolo B | a | b |
|---|---|---|---|
| 45 | 69 | 0.8 | 1.04 |

Per cui, se sul terreno *c* vale 10 km, sappiamo che b vale 10.4 km.

Tutto questo per dire che una tavola del genere sarebbe lunga da fare e lunga da usare. Ora, con calcolatrici piccole e grandi tutto diventa banale, ma un tempo non era così. Perciò gli esperti di trigonometria si misero a pensare e vennero fuori con un'altra idea.

E l'idea fu questa. Qualsiasi triangolo può essere scomposto in due triangoli rettangoli prendendo uno qualunque dei lati come base. Quindi in almeno tre modi diversi.

Ora, il vantaggio del triangolo rettangolo è che, dato un lato qualunque e un angolo (ma non quello retto) si possono ricostruire gli altri due lati e il terzo angolo.  Fissando la lunghezza del lato qualunque eguale ad 1, le nostre tavole ora si possono accontentare di considerare un solo angolo, da cui si ricava tutto il resto.

In effetti, per quanto riguarda gli angoli,  l'angolo C è 90° e la somma degli angoli B + A = 90°. Dato *c*, troviamo *b* "proiettando ortogonalmente" (cioè su una retta perpendicolare alla direzione di proiezione)  il lato *c* secondo la freccia arancione con la complicità dell'angolo A. Dato *c* troviamo *a* proiettando ortogonalmente *c* secondo la freccia azzurra, con la complicità dell'angolo B.

Si definisce cosA il rapporto b/c, e   naturalmente  cosB il rapporto a/c.   O, se vogliamo,

$$b = c \cos A$$
$$a = c \cos B = c \cos(90-A).$$

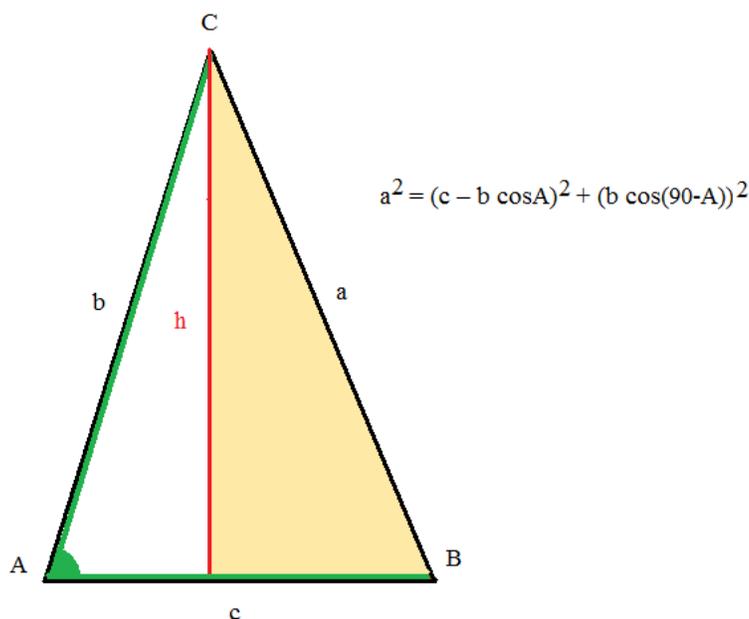
Se abbiamo b e vogliamo c, è facile, si divide b per cosA.
Se abbiamo b e vogliamo a, prima ci troviamo c dividendo b per cosA, e poi lo moltiplichiamo per cosB, quindi a = (b/cosA) cosB = b (cosB/cosA). Oppure dividiamo membro a membro de due equazioni qui sopra.

Ancora meglio:

$$a = b\frac{\cos(90 - A)}{\cos A}$$

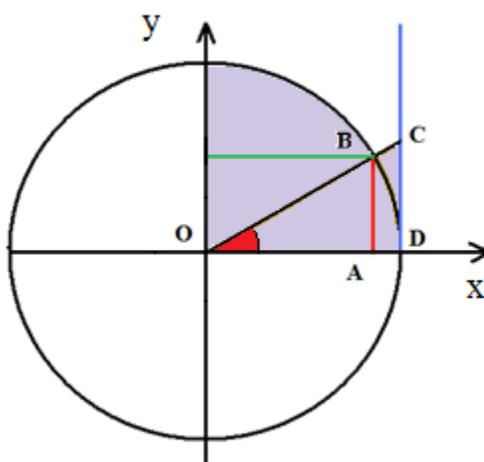
Un'unica tavola che per A  ci dà il numero cosA, con A che varia da 1 a 90, ci basta per tutti i triangoli rettangoli di questo mondo: dati un angolo e un lato, potremo trovare gli altri due angoli e due lati.

## XLVI. COSTRUIRE TAVOLE TRIGONOMETRICHE.

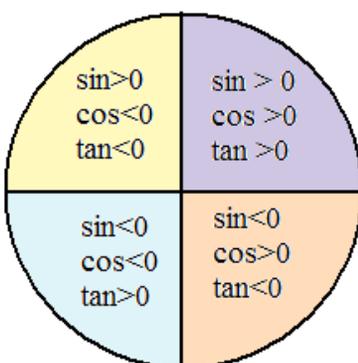
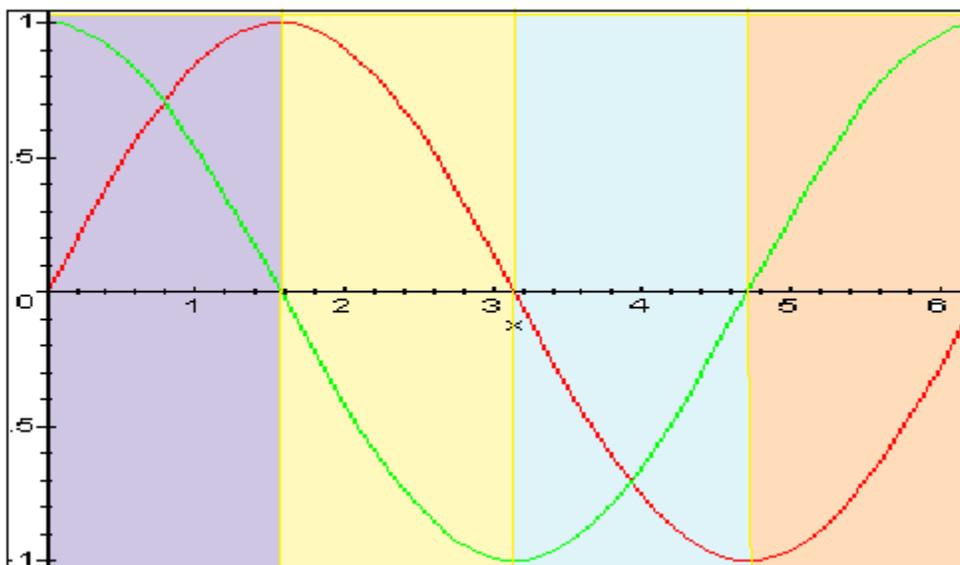
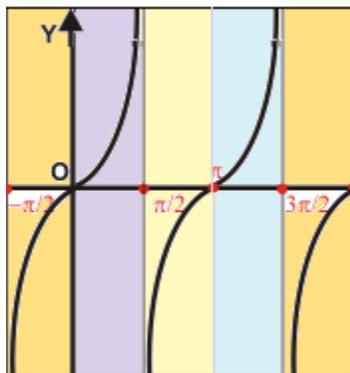
Col ragionamento fatto più sopra troviamo che un'unica tavola di cosA per A che varia da 1 a 90 ci serve per tutti i triangoli rettangoli di questo mondo, e, per le ragioni date, anche per tutti i triangoli, anche non rettangoli, di questo mondo. Come se non bastasse, viene in nostro soccorso anche il teorema di Pitagora, sempre all'erta quando si parla di triangoli rettangoli. Ad esempio, se, dato il triangolo ABC, vogliamo il lato *a* conoscendo l'angolo *A* ed i lati b e *c*, spezziamo il triangolo in due triangoli rettangoli e troviamo:

Dato poi che con metodi di interpolazione che studieremo più avanti coi più volonterosi, si trovano i coseni degli angoli intermedi, abbiamo tutto quello che ci serve. Tuttavia, le compiante tavole trigonometriche davano qualche numero in più, per risparmiare calcoli all'utente.
In particolare notavano che occorrevano quasi sempre tre quantità (vedi fine della sezione precedente):

cosA, cos (90-A), cos(90-A)/cosA.

Niente di più facile dunque, dato A, che elencare cosA (il coseno di A), sinA, (seno di A, ovvero cos (90-A)), e tan A (ovvero sinA/cosA cioè cos (90-A)/cosA).

Altre relazioni fra queste ed altre "funzioni circolari" furono trovate ragionando sul CERCHIO TRIGONOMETRICO, il cerchio di raggio 1. Vediamolo sovrapposto ad un angolo BOA (in rosso).

- OB vale 1
- AB (in rosso)  è il seno, “sin” dell’angolo BOA, in rosso
- OA (in verde) è il coseno “cos” dello stesso angolo
- DC ( in blu) è la tangente, “tan” dello stesso angolo

Se disegniamo il cerchio su carta millimetrata, come faremo, non avremo che misurare per ogni angolo i corrispondenti valori verdi (coseno), rossi (seno),  blu (tangente).
Come abbiamo visto, possiamo anche limitarci a misurare i valori del coseno e poi, una volta che abbiamo la tavola di cos(A) che va da 0° a 90°, trascrivere i valori del seno sapendo che sin(88°) = cos (2°) e tan(88°) = sin(88°)/cos(88°) cioè cos(2°)/cos(88°).

Anche se, come abbiamo detto, per trovare le relazioni fra i vari lati ed angoli di un triangolo rettangolo, e quindi di ogni triangolo, ci bastano i coseni degli angoli nel quarto di cerchio (“quadrante”) colorato in viola, il cerchio trigonometrico ha quattro quadranti e possiamo divertirci a vedere come trovare i valori di cos, sin, tan anche per angoli che ci portano negli altri quadranti. Per angoli molto grandi, queste considerazioni ci risparmiano qualche calcolo in più.

In ogni caso vediamo subito che cos varia tra -1 e 1, e sin varia anche lui tra -1 e 1, ma è sfasato di un quarto di giro. In quanto alla tangente, data che è il rapporto di due numeri, essa va all'infinito quando il denominatore cos(A) =0.
Vediamo anche che le nostre funzioni sono periodiche, nel senso che, fatto un giro, che in radianti vale 2π, cioè circa 6.28, e in gradi vale 360°, sin, cos e tan riprendono gli stessi valori.

La tangente è un po' meno facile da comprendere:

Ciò che sembra strano è "il salto della tangente" : la tangente di A sale rapidamente verso l'infinito quando l'angolo A si avvicina a 90° = π/2. Poi, d'improvviso, diventa negativa e riparte da meno infinito. Ma non è così strano. Se facciamo una tabellina di 4 valori vicino a 90°=π/2 possiamo vedere cosa succede.

| Angolo A | sin A | cos A | sinA/cosA = tanA |
|---|---|---|---|
| 89° | 0.999847 | + 0.017452 | + 57.290 |
| 89.5° | 0.999962 | + 0.008726 | +114.589 |
| 90.5° | 0.999962 | - 0.008726 | - 114.589 |
| 91° | 0.999847 | - 0.017452 | - 57.290 |

Insomma, il problema è il cosA, che passa tranquillamente e continuamente attraverso lo zero. La tangente se lo trova al denominatore e non solo diventa grandissima per angoli vicinissimi a 90°, ma al di là di 90° diventa negativa, essendo il risultato della divisione di un numero negativo per uno positivo..

Questo fatto, che per angoli vicini a 90° la tangente va all'infinito, ci spiega anche perché la tavoletta pretoriana che abbiamo incontrato prima è meno fedele per punti lontani dalla base.

| Angolo (gradi) | Tan(Angolo) |
|---|---|
| 70 | 2.75 |
| 71 | 2.90 |
| 80 | 5.67 |
| 81 | 6.31 |

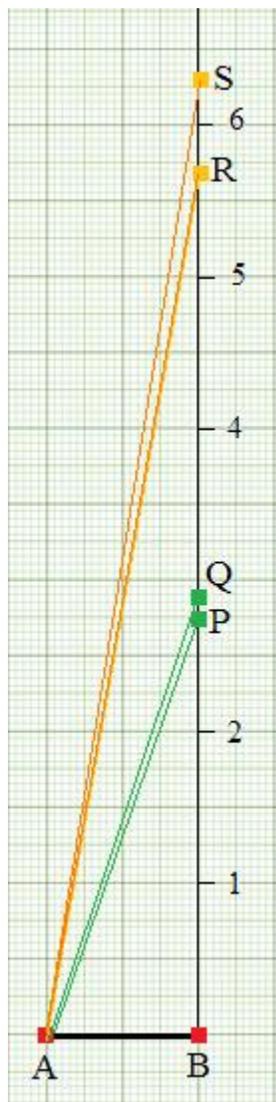
La tabella riflette la situazione data nel disegno qui sotto.

Se la nostra base è AB, e la direzione di un punto, visto da B, forma un angolo di 90°, vediamo che:

- Se le direzioni dei punti P e Q visti da A formano angoli di 70° e 71° con la direzione di B

rispettivamente, la loro distanza da B differisce di 0.15, cioè 15% della base. Cioè, per esempio, quindici metri su cento. Se quindi nel valutare l'angolo facciamo un errore di un grado, possiamo sbagliare la posizione del punto di 15 metri.

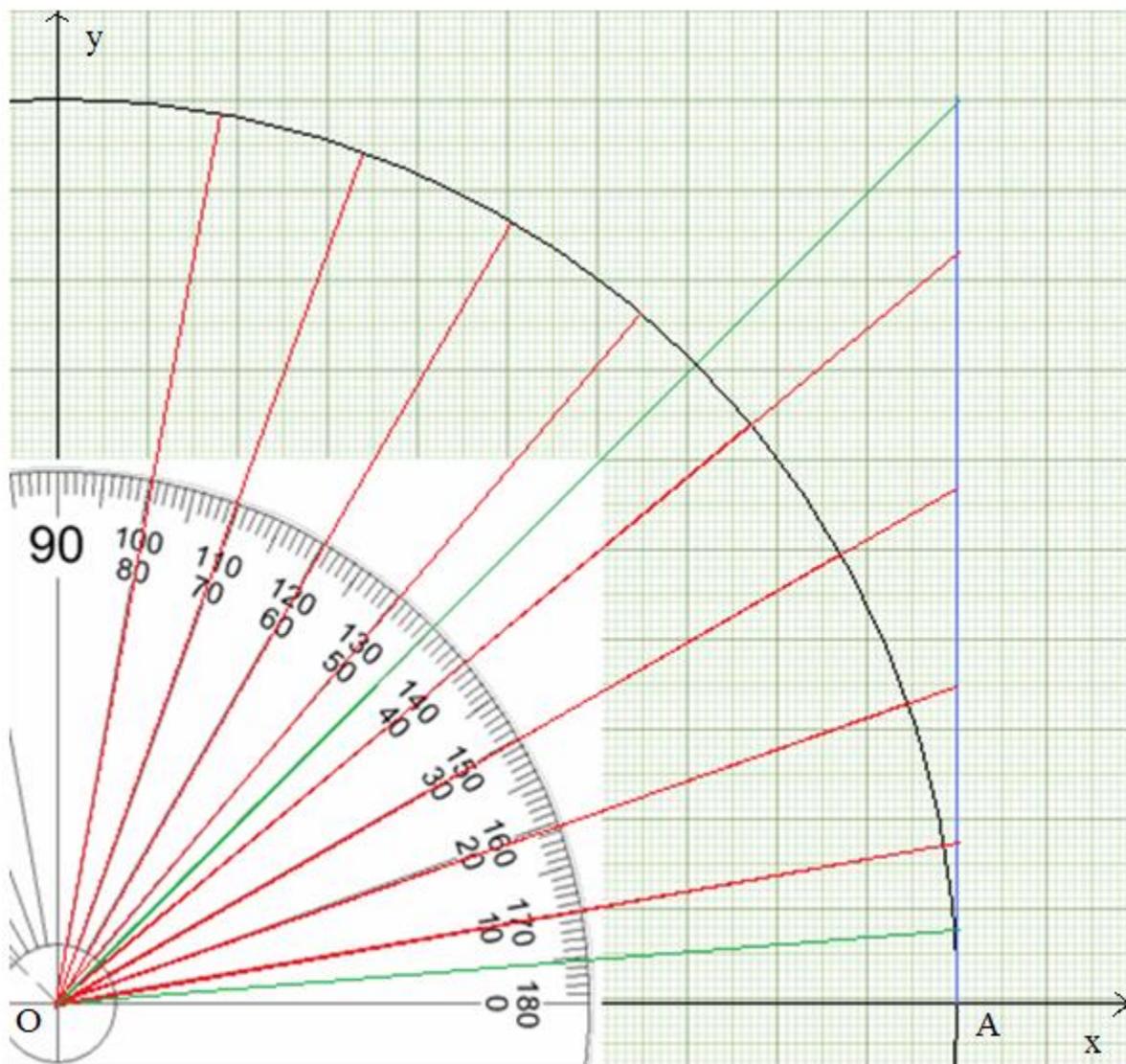
- Se le direzioni dei punti R e S visti da A formano angoli di 80° e 81° con la direzione di B rispettivamente, la loro distanza da B differisce di 0.64, cioè 64% della base. Cioè, per esempio, sessantaquattro metri su cento. Se quindi nel valutare l'angolo facciamo un errore di un grado, possiamo sbagliare la posizione del punto di 64 metri.

Tutto, dipende, naturalmente, dalla precisione che ci occorre. Ma certo, 1° è un errore piccolo nel valutare un angolo, a meno che non si usino strumenti di precisione, e 60 m rispetto a 100 sono un errore grande.

E adesso calcoliamo una buona volta questi valori di cosA, sinA e tanA, usando semplicemente

carta millimetrata, un metodo  che – come vedremo - non è poi così male. Intanto se ricordate tutto quello che si è detto finora, vedete che ci occorre solo misurare “sin”, “cos” e  “tan”  per un quarto di cerchio, cioè fra zero e 90 gradi.

Per far questo occorre:

- disegnare su carta millimetrata un cerchio con centro O di dieci cm di raggio (è il tratto OA);
- tracciare la semiretta (rossa) che forma l’angolo desiderato A  con il raggio orizzontale;
- tracciare la perpendicolare (azzurra) all’asse x nel punto a. Se abbiamo fatto il disegno bene, questa dovrebbe essere una la semiretta tangente al cerchio nel punto A;
- l’intersezione della semiretta rossa col cerchio ha un’ascissa, che è cosA, e un’ordinata, che è sinA. In più la semiretta rossa interseca la semiretta azzurra in un punto di ascissa (ovviamente) 10, e la cui ordinata è tanA;
- dividere per 10 i valori trovati;
- ripetere per diversi angoli e fare una tabella.

Due cifre corrette le dovremmo ottenere.

La nostra tabella, naturalmente, è imprecisa perché il disegno è impreciso e per imprecisione di lettura (ma si potrebbe per esempio ingrandire il cerchio).

| Angolo (gradi) | Sin | Cos | Tan |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| 5 | 0.075 | 0.99 | 0.08 |
| 10 | 0.170 | 0.98 | 0.175 |
| 20 | 0.330 | 0.94 | 0.345 |
| 30 | 0.495 | 0.87 | 0.570 |
| 40 | 0.635 | 0.775 | 0.830 |

| 45 | 0.71 | 0.71 | 0.995 |
|---|---|---|---|
| 50 | 0.765 | 0.64 | |
| 60 | 0.865 | 0.505 | |
| 70 | 0.94 | 0.345 | |
| 80 | 0.98 | 0.18 | |
| 90 | 1.00 | 0.00 | |

Ma siamo stati bravi? Aggiungiamo in rosso le colonne dei numeri corretti, presi da tavole matematiche di tutta affidabilità, con due-tre cifre.

| Angolo (gradi) | Sin | Sin corretto | Cos | Cos corretto | Tan | Tan corretta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| 5 | 0.075 | 0.087 | 0.99 | 0.996 | 0.08 | 0.087 |
| 10 | 0.170 | 0.175 | 0.98 | 0.985 | 0.175 | 0.176 |
| 20 | 0.330 | 0.342 | 0.94 | 0.9397 | 0.345 | 0.364 |
| 30 | 0.495 | 0.500 | 0.87 | 0.866 | 0.570 | 0.577 |
| 40 | 0.635 | 0.643 | 0.775 | 0.766 | 0.830 | 0.839 |
| 45 | 0.71 | 0.707 | 0.71 | 0.707 | 0.995 | 1.000 |
| 50 | 0.765 | 0.766 | 0.64 | 0.643 | | |
| 60 | 0.865 | 0.866 | 0.505 | 0.500 | | |
| 70 | 0.94 | 0.9397 | 0.345 | 0.342 | | |
| 80 | 0.98 | 0.98 | 0.18 | 0.175 | | |
| 90 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | ∞ | ∞ |

L'errore è quasi ovunque inferiore all'un per cento. In quanto a tan 90, vale ∞ perché per quel valore dell'angolo la linea blu in disegno è parallela all'asse verticale, e l'intersezione della eventuale semiretta rossa con quella blu "è partita per la tangente".
In giallo ho marcato i casi in cui l'errore è superiore a 1%.
Francamente, mi sembra che non abbiamo fatto un cattivo lavoro, e sono certo che raddoppiando il raggio potreste facilmente ottenere anche una seconda cifra corretta ovunque.

Altrimenti potete semplicemente imparare ad usare le tavole (o una piccola calcolatrice che vi dia le tavole trigonometriche), in cui, appunto, vi occorrerà cercare solo "sin cioè seno" "cos cioè coseno" e " tg oppure tan cioè tangente".

Ricordando i nostri ragionamenti o guardando i disegni o la tabella e facendovene altri dovreste esser capaci di:

1) Trovare cosA dato sinA, e trovare sinA dato cosA, senza usare la relazione sinA = cos(90°-a). Poi verificate il risultato con i numeri (rossi, per l'amor del cielo!) della tabella. Ricordate solo che il raggio del cerchio è 1 e Pitagora è ancora vivo dopo 2500 anni.

2) Trovare sin(90-A), cos(90-A) – la cosa salta all'occhio dalla tavola dei numeri rossi.

3) Trovare cos (90+A), sin (90+A), più difficile del precedente.

4) Più difficile (ma non impossibile considerando che i due triangoli rettangoli BOA e COD sono simili, e quindi i loro lati sono in proporzione) dovreste anche trovare la relazione tra tanA, sinA, cosA.

Il numero (1) dovrebbe dare un risultato extra. Non solo cosA = sin (90°-A), ma anche

$$\cos A = \sqrt{}(1 - (\sin A)^2)$$

.

ciò che è una semplice applicazione del teorema di Pitagora.
Questa scoperta ci dice quindi che se vogliamo costruire le tavole trigonometriche ed abbiamo una calcolatrice elettronica che ci dà le radici quadrate, basta in qualche modo procurarci cosA per A che va da 0 a 45°. Abbiamo i cosA, calcoliamo i sinA per mezzo del teorema di Pitagora. Poi scambiamo le due tavole andando all'indietro: cos 50° = sin 40°, sin 60° = cos 30° eccetera.

E gli angoli intermedi, per esempio sin 37° ? Possiamo, o ricavarli dalla nostra figura (sin 37° ci verrebbe circa 0.595, e la cifra corretta è **0.601**) o interpolarli. Per interpolare nel modo più semplice, che al limite funziona perfettamente solo per una retta, si deve dire: "Noi vogliamo il seno di 37, cioè il seno di 30 + sette decimi della differenza tra trenta e quaranta, la quale è dieci. Facciamo quindi l'approssimazione che anche il seno di 37 sia dato da (seno di trenta) più 7/10 della differenza tra il seno di quaranta e il seno di trenta.

$$\sin(37) = \sin(30) + \left(\frac{7}{10}\right)(\sin(40) - \sin(30))$$

Mettendo i numeri (rossi) a destra abbiamo:

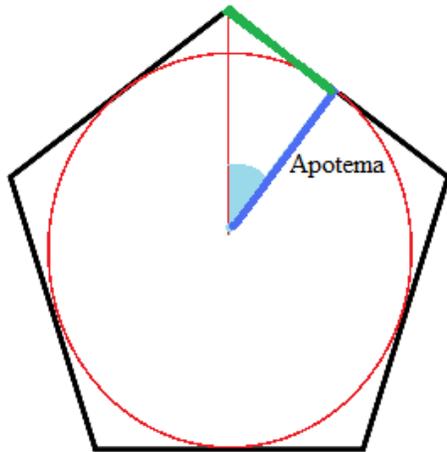
$$\sin(37) = 0.500 + \left(\frac{7}{10}\right)(0.143) = 0.600$$

Non è mica tanto male. Provate a farlo per altri angoli.

Le tavole trigonometriche ci dicono anche qualcosa sui cosiddetti numeri fissi. Quando facevo le elementari, per calcolare aree e perimetri dei poligoni regolari, animali che si incontrano assai di rado nel mondo reale, occorreva prima o poi trovare l'apotema. Brutto nome. Per avere l'apotema si moltiplicava il lato del poligono per un "numero fisso", che, naturalmente, cambiava a seconda del poligono. Io mi ricordavo benissimo i numeri fissi ed avevo un vantaggio sui compagni che avevano meno memoria.
Adesso però non ricordo più i numeri fissi. Che fare?

- Un primo modo è usare le tavole. Dalla figura vedete che, ad esempio per il pentagono, il numero fisso è dato da:

$$\frac{1}{2\,tan\,(angolo)}$$

Dove “tg” o “tan”  o “tangente” è una parente prossima del “sin” che abbiamo trovato più sopra, mentre “angolo”  è  metà dell'angolo al centro, che è 360 gradi/N, dove N è il numero di lati.  Moltiplicando il raggio per il “numero fisso” troviamo l’apotema.  Qui, per esempio, vediamo il caso del pentagono.

Per ottenere l'apotema bisogna dividere il segmento verde (metà del lato del pentagono) per la "tan" dell'angolo azzurro, che è metà dell'angolo che sottende un lato, cioè 1/2 di 1/5 di 360 gradi, cioè 36 gradi.

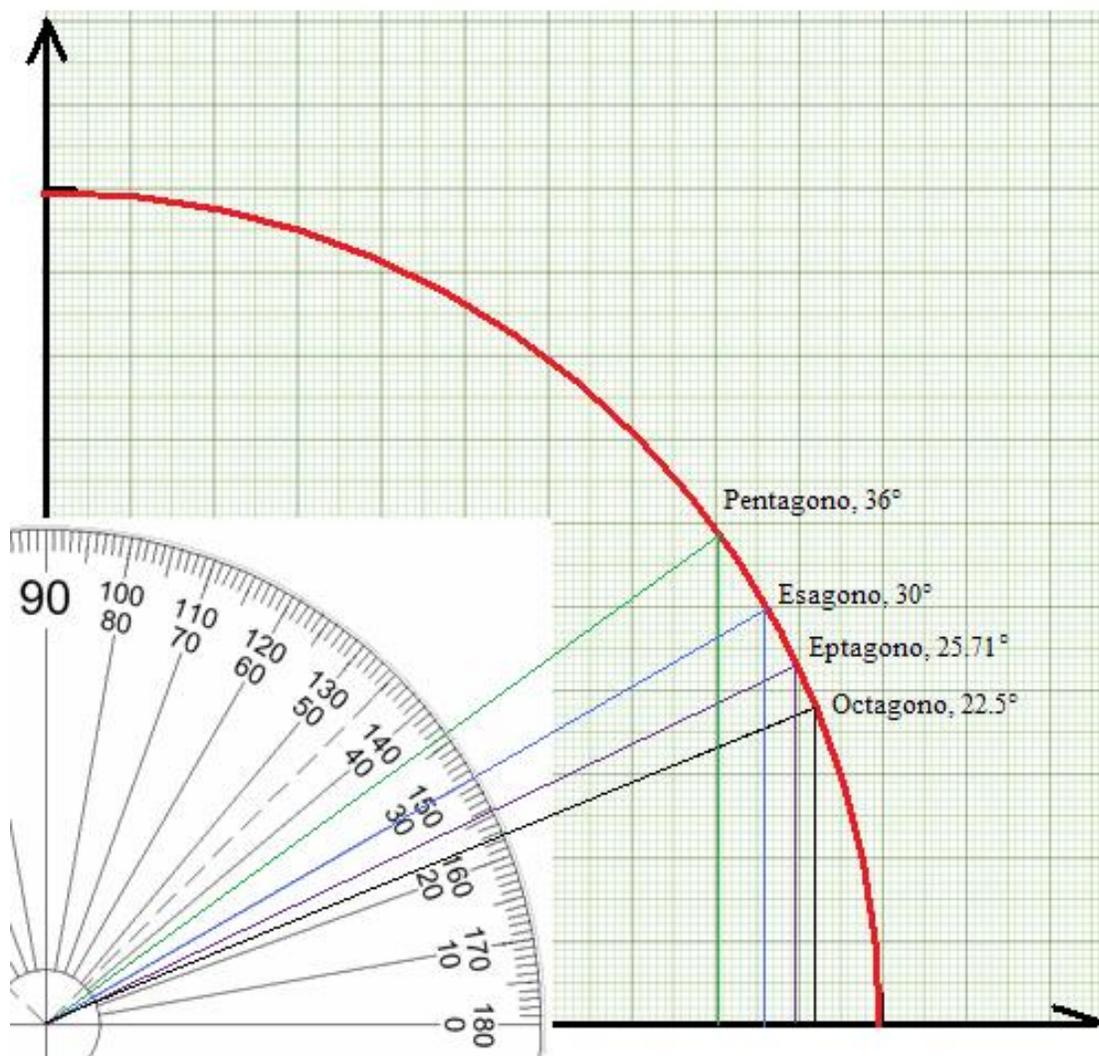
- Un secondo modo è sapere come si calcola direttamente  la “tan” di un angolo. E’ lungo, e in questo libro non lo impareremo. Naturalmente, però, se abbiamo cosA, tanA = cos(90°-A)/cosA
- Un terzo modo è usare il nostro disegno fatto su carta millimetrata, che, come abbiamo visto, ci dà dei valori affidabili fino a 1%.

Dalla figura abbiamo anche il valore del numero fisso che, dato il lato del  pentagono, ci dà l’apotema. Leggiamo che tan(36) = 0.725. Quindi l’apotema del pentagono dovrebbe essere intorno a 0.689 volte il lato. Se cercate il valore del “numero fisso” sulle tavole trovate che esso vale 0.688. Non troppo male neanche questo.

L’apotema l’avremmo potuta trovare facilmente anche senza passare per le tangenti: solito foglio di carta millimetrata, e abbiamo la seguente figura, valida per pentagoni, esagoni, eptagoni. Per i quadrati spero non ce ne sia bisogno.

Sulla carta, ho segnato per ogni poligono metà del lato, che è il tratto verticale dal cerchio alla retta orizzontale. L’angolo è ovviamente metà dell’angolo al centro per i quattro poligoni considerati.

| Poligono | Mezzo lato | Lato | Apotema | Apotema / Lato | Valore corretto |
|---|---|---|---|---|---|

| Pentagono (verde) | 0.585 | 1.170 | 0.8 | 0.684 | 0.688 |
|---|---|---|---|---|---|
| Esagono (blu) | 0.5 | 1.00 | 0.86 | 0.86 | 0.866 |
| Eptagono (viola) | 0.435 | 0.870 | 0.895 | 1.029 | 1.038 |
| Octagono (nero) | 0.38 | 0.76 | 0.92 | 1.210 | 1.207 |

**Qualche altro esercizio.**

Se osservate bene il cerchio trigonometrico, se notate che triangoli simili hanno i lati corrispondenti in proporzione, e se ricordate che il raggio del cerchio trigonometrico è 1, allora

potete risolvere i seguenti problemi, alcuni dei quali noi già abbiamo cercato di valutare con il metodo dell'unghia del mignolo e altri.

1) Calcolare l'altezza h di una montagna conoscendo la distanza R "in pianta" e l'angolo A . Fate la proporzione:

$$\frac{h}{R} = \frac{\tan A}{1}$$

2) Calcolare il dislivello totale h accumulato in L km di percorso da una strada che sale con una pendenza di 15 gradi. Anche qui fate la proporzione.

$$\frac{L}{h} = \frac{1}{\sin(15)}$$

2) Calcolare la distanza dalla vetta di una montagna conoscendo la distanza "in pianta".

3) Calcolare la larghezza di un fiume non attraversabile conoscendo la lunghezza di una base rettilinea su una riva, e gli angoli che formano con la base le rette che congiungono gli estremi della base ad un riferimento dall'altra parte del fiume.

4) Calcolare la distanza dalla vetta di una montagna conoscendo la lunghezza di una base e gli angoli che formano con la base le rette che congiungono gli estremi della base alla vetta.

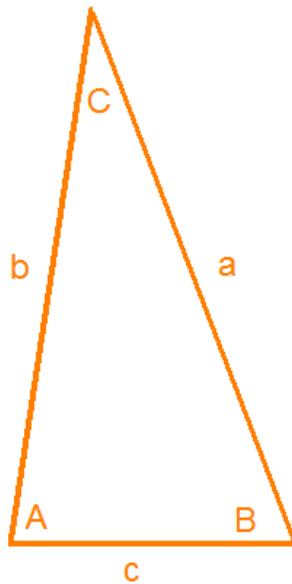
Una piccola calcolatrice che dia le cosiddette funzioni trigonometriche è naturalmente equivalente alle tavole e molto più facile da usare. Può anche darci molte più cifre decimali del necessario Questa storia delle approssimazioni va capita presto per evitare calcoli inutili. In un calcolo sovente avete degli oggetti di cui misurate le dimensioni, la massa etc. e delle costanti che invece prendete dai libri. Se avete un tavolo rotondo di 1 m di raggio misurato con un metro snodabile (precisione 1 mm) e volete calcolarne l'area, è inutile usare per pigreco il valore 3.141592. Avete al minimo 2 e quasi certamente tre cifre di troppo. Se poi misurando due diametri del tavolo vedete che differiscono per 1 cm (cosa non infrequente nei tavoli vecchi) vuol dire che usando 3.14 avrete la precisione sufficiente. Così nella nostra topografia fatta con strumenti modesti a livello non professionale se misuriamo una "base" con la precisione di mezzo metro su 50 metri, bastano sicuramente valori di sin, cos e tan con la precisione di 3 cifre (e molto probabilmente bastano anche due cifre).

Con una calcolatrice che dà seno, coseno e tangente ed una bussola di precisione, di quelle con fenditura che vi indicano la direzione esatta, potete misurare distanze. Data una base di lunghezza c - nota, andate prima ad un estremo A e poi all'altro, B, e puntate da entrambi ad un punto C inaccessibile di cui volete conoscere la distanza. Con un piccolo ragionamento non è necessario usare il teorema di Pitagora, come abbiamo fatto in precedenza. Osservate: La bussola vi darà l'angolo rispetto al nord. Magari aiutandovi con un diagramma potrete trovare i due angoli A e B.
La regola è che una distanza ignota, per esempio b, è data da

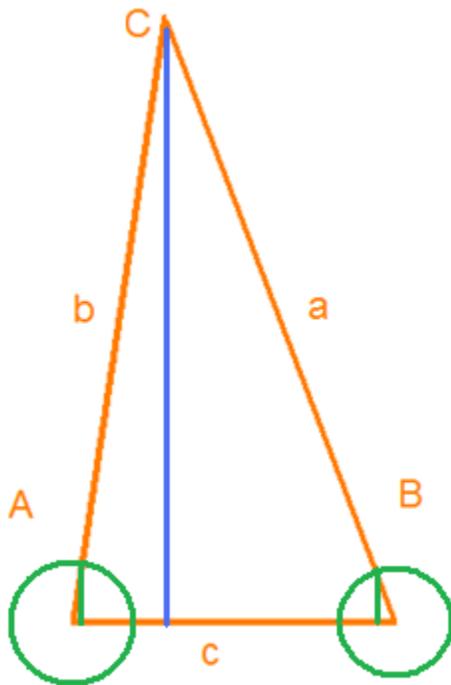
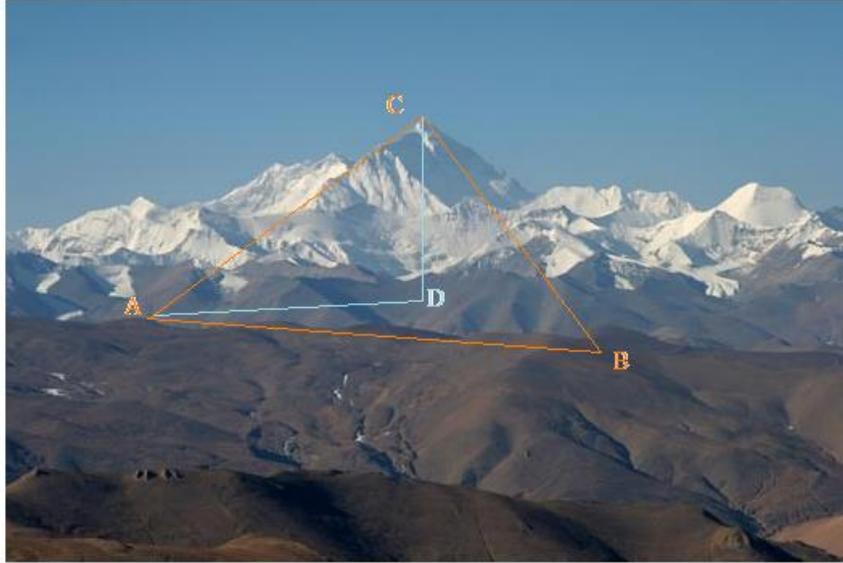
$$b = \frac{c \, sinB}{sinC}.$$

Invece  l'altra distanza ignota è data da

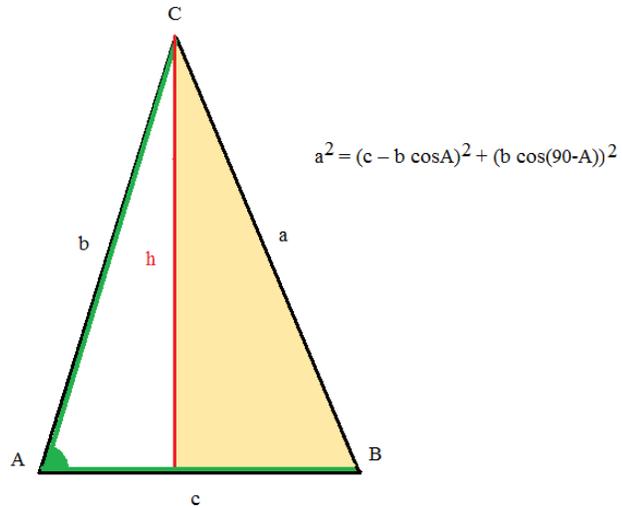
$$a = \frac{c \, sinA}{sinC}.$$

Naturalmente   C = 180° - A – B (in gradi).

Se A vale 90 gradi, e B vale 45 gradi, C vale anche 45 gradi. Quindi, usando la prima relazione, abbiamo quello che già sappiamo, che in questo caso $b = c$.
Con un buon disegno su carta millimetrata ottenete pur sempre una o due cifre corrette, senza chiedervi perché  mai, dato un triangolo qualunque,

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$

Ma non è così strano.

Piazziamo i nostri cerchietti trigonometrici in A e in B. I due tratti verdi verticali sono rispettivamente sinA e sinB.
La verticale azzurra, vista da sinistra, come sappiamo, è *b sinA*; vista da destra è *a sinB*. Dato che la verticale azzurra è la stessa, abbiamo $b \sin A = a \sin B$, e, dividendo ambo i membri per il prodotto
*sinA sinB* , otteniamo la parte che ci interessa dell'equazione data qui sopra.

La figura precedente (in cui riconoscerete il nostro triangolo ABC) fa un'ipotesi di come si potrebbe misurare l'altezza del monte Everest. Sulla linea di colline in secondo piano non dovrebbe esser difficile misurare con precisione come base la distanza AB, nonché gli angoli A e B che la direzione della vetta della montagna forma con la base.
Col metodo indicato si potrebbe quindi calcolare la distanza AC. Infine, basandosi sul triangolo rettangolo ADC, si potrebbe misurare facilmente l'altezza DC = AC sin A (a cui poi si dovrebbe sommare la quota di A sul livello del mare).

Il tizio che per primo misurò l'altezza dalla montagna si chiamava James Nicolson, ma fece la sua misura dal versante sud, mentre in fotografia vediamo il versante nord. Potete comunque immaginare di essere a circa quattromila metri di quota, flagellati dal vento freddo e asciutto del Tibet, mentre vicino a voi grugnisce uno yak e voi cercate di misurare gli angoli A e B. C'è chi lo ha fatto.

Per finire diamo un'altra occhiata ad una figura già vista:

Svolgendo l'espressione di $a^2$ e ricordando che cos (90°-A) = sinA, e che $cos^2 A + sin^2 A = 1$ abbiamo che

$a^2 = c^2 - 2\, b\, c\, cosA + b^2\, cos^2 A + b^2 sin^2 A \; = \; c^2 + \; b^2 - \; 2\, b\, c\, cosA$

Questo teorema è la generalizzazione del teorema di Pitagora. Se A valesse 90°, sarebbe cosA =0, e avremmo il teorema di Pitagora. Questo si chiama invece "Teorema di Carnot" e fu scoperto più di 2000 anni più tardi.

**XLVII. UN PO' DI FORMALISMO, ma solo per coloro a cui piace (Parte III e ultima).**

*L'amico ricomparve con un occhio nero. I due però decisero di fare la pace in un "pub" decente.*
*Isacco moriva dalla voglia di continuare a parlare delle sue serie. L'amico, che era un tipo paziente, lo capì, e – dopo tre birre - disse:*

- *Allora, Isacco, come va con le serie? Fatti altri progressi?*
- *Ma certo, rispose Isacco raggiante. Ti ricorderai che la volta scorsa parlavamo dell'operatore $E = 1 + \Delta$, che potremmo chiamare "incremento"?*

*All'amico l'operatore "incremento", per vari motivi, non era piaciuto. Ma disse "Mi ricordo".*

- *E ti ricordi che $E^n f(0)$ l'avevamo messo eguale a $f(n)$?*
- *Mi ricordo, disse l'amico sempre meno entusiasta.*
- *Ma allora, disse Isacco: secondo te che cosa vuol dire*

$$\mathbf{E^r\, f(0)} \quad ?$$

*con r compreso tra 0 e 1? Che poi, tra l'altro, va anche bene per $E^r f(n)$.*

- *Non ne ho la minima idea, disse l'amico.*
- *Ma ragiona! Insistette Isacco. $E^1 f(0)$ dà $f(1)$. Quanto può valere $E^{0.5} f(0)$?*

*L'amico bevve una birra intera, poi disse:*

- *Forse $E^{0.5} f(0) = f(0.5)$?*

*Poco mancò che Isacco lo abbracciasse.*

- *Capisci che adesso possiamo interpolare, cioè calcolare i dati intermedi in una tavola? L'altro giorno certi miei amici dovevano calcolare sin(37°) e avevano una tavola che conteneva sin(30) e poi sin (40).*
- *Ma mi pare che non se la siano cavata male.*
- *Potevano cavarsela meglio.*
- *E come?*
- *Come, mi domandi? Ma se abbiamo detto che $E = 1 + \Delta$, vuol dire che*

$$\boldsymbol{E^r f(n) = (1 + \Delta)^r f(n).}$$

- *Siamo da capo! Strillò l'amico, che ricordava ancora il pugno.*
- *Non ti agitare, che ti fa male, disse Isacco. Ti assicuro che funziona. Tu sviluppi la potenza del binomio e trovi che:*

$$\boldsymbol{f(n+r) = f(n) + r\,\Delta f(n) + \left(\frac{r(r-1)}{2}\right)\Delta^2 f(n) + \cdots}$$

*Vedi la bellezza? Per calcolare $E^r$, con r non intero, ci occorrono soltanto le differenze "intere", cioè prime, seconde etc.*
*Nota che r deve essere tra 0 e 1. Quindi in realtà è dato da una frazione dell'intervallo. Per esempio in sin(37°) r non è uguale a 7, ma è 7/(40-30), cioè 0.7.*

- *E gli altri termini?*
- *Ho idea che con due termini ne abbiamo da vendere, ma possiamo continuare fin che ci pare. Se ti metti con un po' di buona volontà li calcoli anche tu. Son sempre gli stessi.*

- *L'amico bevve un'altra birra e disse: Il prossimo termine allora è (r(r-1)(r-2))/6 moltiplicato per la differenza terza?*

- *Precisamente, rispose Isacco. Facciamo un esempio per sin(37°), che tavole accurate ci dicono essere **0.601815023** (ma noi naturalmente non lo sappiamo).*

| Angolo | Valori (dalle tavole) | Differenze prime, $\Delta$ | Differenze seconde, $\Delta^2$ | Differenze terze $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 30° | 0.5000000 | | | |
| | | 0.14278761 | | |
| 40° | 0.64278761 | | - 0.019530777 | |
| | | 0.123256833 | | -0.003745019 |
| 50° | 0.766044443 | | - 0.02327585 | |
| | | 0.099980961 | | |
| 60° | 0.866025404 | | | |

*Allora vedi che se ci fermiamo alle differenze prime (la cifra rossa), otteniamo, per r =0.7,*
$sin(37°) = sin(30°) + (0.7)\ (0.14278761)$ = **0.599951369**.

*Invece, se includiamo la differenza seconda, cifra verde, abbiamo:*
*sin(37°) = (teniamo tutto quel che abbiamo) + (correzione)*
$0.599951369 + \left(\frac{(0.7)(0.7-1)}{2}\right)(-0.019530777).$

*Spero che tu abbia tenuto conto dei segni: noi qui facciamo sempre la differenza dal basso in alto.*
*La correzione sommata a quello che avevamo dà: **0.60200210.***

*Siamo ormai molto vicini. Ma aggiungiamo ancora un termine, la cifra blu:*

$$\left(\frac{0.7(0.7-1)(0.7-2)}{6}\right)(-0.003745019) = -0001703983$$

*Con questa correzione, il risultato è **0.6018317** contro 0.601815 delle tavole. Tutto sommato, partendo da una tavola così rozza, che ci dà sinA di dieci in dieci gradi, è sorprendente che otteniamo un risultato con un errore così piccolo, tre parti su centomila, per un valore intermedio.*
*E con questo Isacco se ne andò, e l'amico non lo vide più.*

Noi potremmo pensare al solito programma in QBasic che ci calcoli le interpolazioni fino ad includere le differenze terze.

***PROGRAMMA NUMERO 7 IN BASIC – INTERPOLAZIONE METODO DI NEWTON***

```
CLS
REM INTERPOLAZIONE CON IL BINOMIO DI NEWTON
INPUT "primo valore ", f0
INPUT "secondo valore ", f1
INPUT "terzo valore ", f2
INPUT "quarto valore ", f3
d0 = f1 - f0
d1 = f2 - f1
d2 = f3 - f2
PRINT d0, d1, d2
d20 = d1 - d0
d21 = d2 - d1
PRINT d20, d21
d30 = d21 - d20
PRINT d30
INPUT "valore intervallo tra i dati ", delta
INPUT "differenza tra punto di interpolazione e  x0 ", diff
r = diff / delta
valore1 = f0 + r * d0
valore2 = valore1 + (r * (r - 1)) * d20 / 2
valore3 = valore2 + (r * (r - 1) * (r - 2)) * d30 / 6
Print r, valore1, valore2, valore3
```

Questo programma vi costruisce la tavola delle differenze e le mostra sullo schermo, con le tre istruzioni “PRINT” su campo rosa. Poi vi chiede dove volete l’interpolazione, ed infine vi dà le approssimazioni successive.

## XLVIII. ENTRA IN SCENA GIUSEPPE LUIGI

Giuseppe Luigi Lagrange

*Siamo a Torino, poco meno di un secolo dopo i dialoghi di Isacco con l'amico. Siamo in Via Lagrange, che allora si chiamava Contrada dei Conciatori. Un tizio vede un giovane con la testa nelle nuvole e gli dice:*

- *Ehi, Giuseppe Luigi, come va? Sempre con la testa nelle nuvole?*
- *Quali nuvole? Quale testa?, chiese Giuseppe Luigi Lagrange, che era effettivamente un po' trasognato.*
- *Sveglia! A cosa stai pensando?*
- *Già, pensavo…pensavo che se i dati non sono equispaziati il metodo di Newton non si applica.*
- *Che diavolo significa?*
- *Significa che il metodo di Newton per interpolare dati di una tavola numerica usando il binomio che lui ha inventato non funziona se i punti in cui conosciamo la funzione non sono regolarmente spaziati, come per esempio, sin30°, sin40°, sin50°, ma sono, per esempio, sin30°, sin35°, sin 42° eccetera.*
- *Non mi sembra un problema grave, disse l'amico.*
- *Lo dici tu. Io invece devo fare proprio questa interpolazione e devo trovare il modo di riuscire.*
- *Se non c'è riuscito Newton, vuoi riuscirci tu?*
- *Il peggio è che mi sembra che lui avesse inventato un metodo di interpolazione anche per questo caso, ma non sono riuscito a trovarlo nella biblioteca dell'Accademia delle Scienze, anche perché non l'ho ancora fondata. Mi pare che lo chiamasse il "metodo delle differenze divise".*
- *Non ti posso aiutare.*
- *Va bene, adesso ti lascio. Mi è venuta proprio adesso un'idea che forse forse…*

*Dopo qualche giorno, sempre in Contrada dei Conciatori, dove Lagrange era nato ed abitava, l'amico ritrova Giuseppe Luigi, raggiante.*

- *Non mi dire che sei riuscito!*

- *Sicuro. Vediamo se riesco a spiegarti il metodo.*
- *Avanti.*
- *Noi vogliamo trovare una funzione semplice  che interpoli tra i valori di un'altra funzione, per esempio cosA o qualsiasi altra. Abbiamo i valori della funzione desiderata in tre punti a caso, a, b, e c.  Chiamiamo i valori noti della funzione y(a), y(b), y(c).  A noi occorre una y(x), con x qualsiasi tra a ,b,c, che valga y(a) per x =a, y(b) per x = b, y(c) per x= c.*
- *Puoi mica andare un po' più piano?*
- *Non è complicato. Per y(x) scegliamo il polinomio più semplice possibile.*
- *Buon'idea.*
- *…che non può essere una retta, perché una retta passa sempre per due punti qualsiasi, non per  tre punti.*
- *A meno che sia abbastanza spessa.*
- *Molto spiritoso. Dunque, l'equazione più semplice dopo la retta è un'equazione del secondo grado.*
- *Come vuoi.*
- *Scriviamola così:*

$$y(x) = y(a) \cdot A(x) + y(b) \cdot B(x) + y(c) \cdot C(x)$$

  *Dove A, B, C sono polinomi del secondo grado.*
- *Ti voglio vedere a trovarli.*
- *Ma non è così difficile:  A(x) deve valere 1 quando x =a, e deve valere 0 quando x = b o x= c.  Quindi vedo bene un prodotto (x-b)(x-c) moltiplicato una costante che rende A  1 quando x =a.*

  *Quindi scusami tanto, sai, ma*

$$A(x) = k\,(x-b)(x-c).$$

- *Ma quanto vale k?*
- *Ma lo si vede subito!*

  *Dobbiamo avere, quando x = a:*

$$A(a) = k(a-b)(a-c)= 1$$

  *Cioè*

$$k = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

  *Vale a dire:*

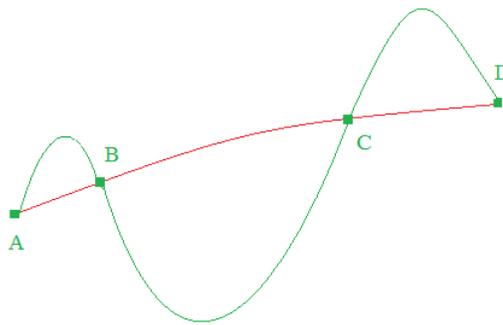
$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$$

  *E allo stesso modo troviamo gli altri. Per cui il polinomio interpolatore, per a ,b, c   a qualunque distanza l'uno dall'altro, è:*

$$y(x) = y(a)\left(\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}\right) + y(b)\left(\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\right) + y(c)\left(\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$$

- *Va bene, tutto ciò è molto bello. Ma secondo me serve poco. Chi è così cretino da fare una tavola y(x) per valori di x che non sono ordinatamente spaziati? Per esempio le tavole dei coseni le ho sempre viste per angoli come 1°, 2°, 3°.*
- *Invece succede più sovente di quanto tu non creda. Ma la cosa più interessante è quando tu, per valori a eguale distanza di x hai trovato dei valori di y(x) che se ne vanno per*

*conto loro. Adesso, se tu hai un valore y(X), come fai a trovare dove sta X? Per esempio se vuoi moltiplicare 2.5  x 3, tu cerchi il logaritmo di 2.5  e quello di 3 su tavole che ti danno i logaritmi di 1,2,3,4 etc. Ma quando trovi il logaritmo del prodotto, come fai a trovare a che numero corrisponde? Non lo trovi sulle tue tavole, e non saprai mai che il prodotto fa 7.5.*

- *Allora interp…per Giove, hai ragione. I  logaritmi non sono più a eguale distanza. Adesso vedo dove serve il tuo metodo. Ma scusa. Perché non usiamo quattro punti?*
- *Ti dirò, credo che tre punti siano una buona scelta, altrimenti rischiamo di costruire curve che  passano sì per quattro, cinque e sei punti, ma  che vediamo subito ad occhio che non possono essere una buona rappresentazione della curva che vogliamo interpolare. Questo disegnino te lo può spiegare: tutti possono vedere che la curva da interpolare cha passa per A, B, C, D è molto probabilmente quella rossa, ma una mia formula analoga a quella data per tre punti, può invece darti quella verde, che anche lei passa per i quattro punti A, B, C, D. Con tre punti e una curva del secondo grado, mi pare meno probabile che succeda.*

- *Vedo.*
- *Ciao, adesso devo andare?*
- *Ma dove?*
- *A interpolare logaritmi.*

In effetti noi ci siamo trovati in una situazione del genere quando abbiamo costruito il nostro regolo calcolatore ed abbiamo interpolato “a naso” i valori per 2, 3, 4, 5, 9.
Il lavoro lo si può far meglio con l’interpolazione Lagrangiana a punti non equidistanti.

Per prima cosa ci ricalcoliamo i punti sul regolo (cioè le potenze di 1.1, calcolo facilissimo da farsi a mano), con 4 cifre corrette, ciò che prima non ci serviva, vista la grossolanità del metodo.

| Esponente o logaritmo | Potenza in base 1.1 |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1.1 |
| 2 | 1.21 |
| 3 | 1.331 |
| 4 | 1.4641 |
| 5 | 1.6105 |
| 6 | 1.7716 |
| 7 | 1.9487 |
| 8 | 2.1436 |
| 9 | 2.3576 |
| 10 | 2.5937 |
| 11 | 2.8531 |
| 12 | 3.1385 |
| 13 | 3.4522 |
| 14 | 3.7975 |
| 15 | 4.1772 |
| 16 | 4.5950 |
| 17 | 5.0545 |
| 18 | 5.5599 |
| 19 | 6.1159 |
| 20 | 6.7275 |

Naturalmente, per l'interpolazione un elementare programma QBasic può aiutare.

***PROGRAMMA NUMERO 8 IN QBASIC: INTERPOLAZIONE LAGRANGIANA***

```
CLS
REM Lagrange interpolation
FOR i = 1 TO 3
INPUT "posizione ", x(i)
INPUT "valore ", y(i)
NEXT i
INPUT "Per quale posizione vogliamo conoscere la funzione? ", z
u1 = y(1) * ((z - x(2)) * (z - x(3))) / ((x(1) - x(2)) * (x(1) - x(3)))
u2 = y(2) * ((z - x(1)) * (z - x(3))) / ((x(2) - x(1)) * (x(2) - x(3)))
u3 = y(3) * ((z - x(2)) * (z - x(1))) / ((x(3) - x(2)) * (x(3) - x(1)))
PRINT z, u1 + u2 + u3
```

Il ciclo rosa è soltanto per introdurre i dati senza scrivere un programma troppo lungo. Abbiamo quattro istruzioni brevi e intelligenti invece di sei istruzioni più lunghe e un po' bovine (ma sempre valide).

In quanto alle righe verdi sono i tre addendi scritti separatamente perché altrimenti l'istruzione diventa troppo lunga.
Ora per prima cosa, nel nostro regolo calcolatore, calcoliamo quanto vale l'esponente o logaritmo di 2.
Per questa operazione ci serve una parte della tabella di cui sopra, in cui le x sono i valori delle potenze, le y quelli degli esponenti, cioè i logaritmi.

| x | y |
|---|---|
| 1.9487 | 7 |
| 2.1436 | 8 |
| 2.3576 | 9 |

Eseguiamo l'interpolazione per x = 2 e troviamo che l'esponente y (o logaritmo di 2 in base 1.1) vale 7.2715.
Poi eseguiamo una simile interpolazione per trovare il valore dell'esponente di x =3

| x | y |
|---|---|
| 2.8531 | 11 |
| 3.1385 | 12 |
| 3.4522 | 13 |

..e troviamo che l'esponente y (o logaritmo di 3 in base 1.1) è 11.5254.
Sommando log2+log3 troviamo 18.7969. Questo dovrebbe essere il log6. Infatti, con un'ennesima interpolazione:

| x | y |
|---|---|
| 5.5599 | 18 |
| 6.1159 | 19 |
| 6.7275 | 20 |

Troviamo per x=6 il valore di log6= 18.7987
L'approssimazione è buona e se disegniamo il regolo su carta millimetrata ci dà tutta la precisione che possiamo utilizzare, se non vogliamo usare un regolo lungo 2 metri.

Tra l'altro potreste dividere per due il log2 = 7.2715, e trovereste il logaritmo della radice quadrata, che vale 3.63575. Questa volta dovete scambiare le x e le y.

| x | y |
|---|---|
| 3 | 1.331 |
| 4 | 1.4641 |
| 5 | 1.6105 |

Cercate ora la y che corrisponde all'esponente 3.63575, e trovate 1.414078, mentre la radice di 2 è 1.4142. Qui abbiamo tre buone cifre decimali.

Ma allora, qualcuno potrebbe dire, che logaritmo decimale (esponente) ci viene per 2, conoscendo le potenze di 2? Noi ci immaginiamo che sia più facile interpolare tra valori vicini che tra valori lontani, quindi prima calcoleremo il logaritmo di 10 in base 2, poi faremo l'inverso, che, come sappiamo, è il log 2 in base 10, cioè quello che cerchiamo.

| x | y |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |
| 16 | 4 |

Il risultato è che il log 10 in base 2 è 3.375. Il conto può essere fatto rapidamente a mano. Da cui troviamo che il log2 in base 10, l'inverso, è 1/3.375 = 0.296. L'approssimazione qui non è molto buona, perché dovrebbe risultare 0.301. Ma in fondo la differenza è 1.6%, niente di cui vergognarsi, con dei valori così malmessi.

Se avessimo tentato direttamente con le potenze assai più lontane di 10 avremmo trovato:

| x | Y (logaritmi) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 10 | 1 |
| 100 | 2 |

con un modestissimo log2 = 0.119.    Insomma, i valori di x sono troppo lontani fra loro.

Si possono anche risolvere equazioni  di grado superiore al primo usando questo tipo di interpolazione e considerando che risolvere l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, equivale a trovare il valore di x per cui la funzione $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  vale zero. Per questo basta fare una tabella cercando tre valori di x in almeno uno dei quali il segno della funzione y(x) sia diverso dagli altri due. Questo lo si trova facilmente soprattutto se si fa un grafico di y(x). Poi si  usano i tre valori di y come "posizione", i valori di x come "valori della funzione" e si interpola cercando la funzione x al valore della posizione zero (Immagino che sia chiaro).
Di norma una tabella non basta: prima se ne fa una grossolana per vedere la regione in cui la funzione cambia segno, poi si va in quella regione e si fa una tabella più dettagliata.

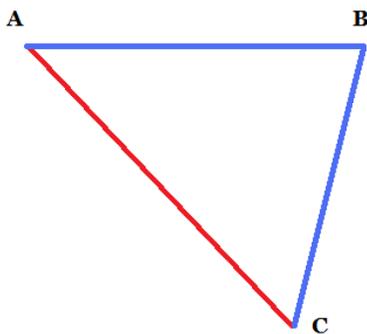
## XLIX. DISTANZE E DISTANZE.

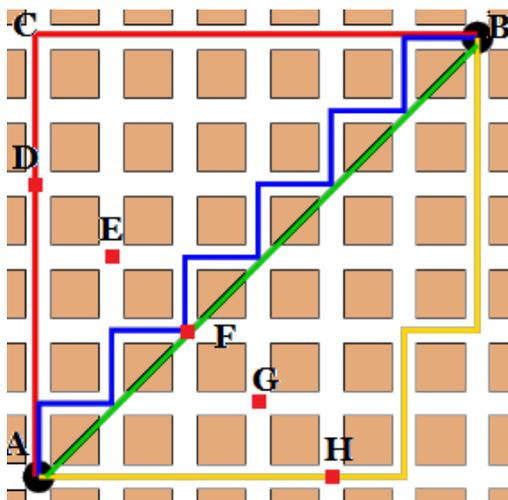
Per trovare la distanza tra due punti nello spazio abbiamo detto che dovremmo usare il teorema di Pitagora in tre dimensioni. Da cui:

$d^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$.

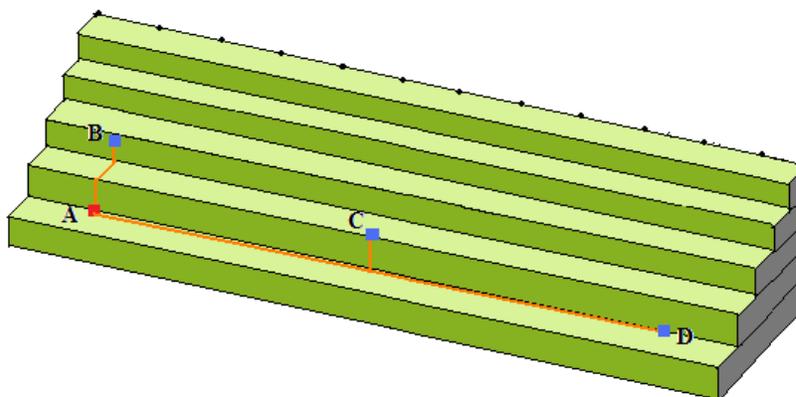
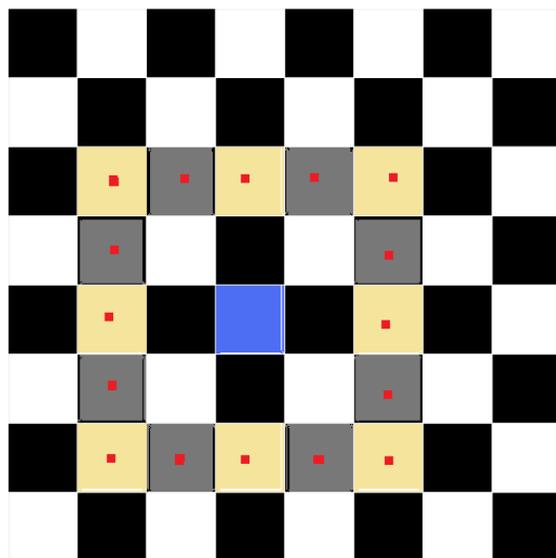
Questa distanza è detta Euclidea, dal nome del solito Euclide, ed è quella che ha le più frequenti applicazioni.

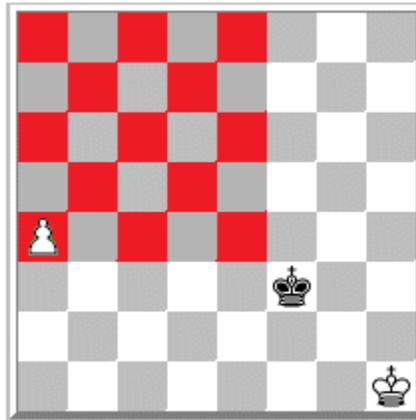
Tuttavia, mentre in natura si definivano le distanze come si poteva, i matematici decidevano che dati due punti A e B in uno spazio "qualunque" (e quando i matematici dicono qualunque, veramente intendono qualunque) si può definire come si vuole la distanza d(A, B) come un numero che dipende dai due punti, purché
1) il valore della distanza, cioè il numero, sia sempre positivo (o al massimo nullo), cioè $d(A,B) \geq 0$
2) la distanza sia zero se e solo se i due punti coincidono, cioè $d(A,A)=0$;
3) la distanza da A a B sia uguale alla distanza da B ad A, cioè $d(A,B)= d(B,A)$ ("proprietà di simmetria");
4) dati tre punti distinti A, B, C, valga la diseguaglianza $d(A,B)+d(B,C) \geq d(A,C)$.

Ci si può render ragione di queste proprietà con le distanze "Euclidee" che conosciamo o dovremmo conoscere. La proprietà n.4 è detta anche "disuguaglianza triangolare". Un lato di un triangolo sul piano è minore della somma degli altri due lati, a meno che ABC siano sulla stessa retta.

Nonostante l'utilità della distanza Euclidea, ci sono in circolazione ed in uso comune vari altri tipi di distanza, misurati magari in spazi costituiti da punti diversi dai punti a cui siamo abituati.

I taxisti, per esempio, usano un tipo diverso di distanza. Se sono fortunati a vivere in una città in cui le strade si incontrano ad angolo retto, come Torino o molte nuove città, per esempio negli Stati Uniti, o anche in antiche capitali cinesi o di imitazione cinese (quindi Kyoto e non Tokyo) la situazione è ancora controllabile. In una città come Milano o Roma o Tokyo, la situazione è assai più caotica.
Ma vediamo il caso più semplice.

Vediamo che la distanza Euclidea tra A e B, linea verde, impossibile per un taxi a meno che esista una galleria sotterranea, è minore della distanza misurata su percorsi possibili ai taxi. Inoltre, il percorso giallo, il percorso rosso ed il percorso azzurro hanno la stessa lunghezza, 12. La sorpresa viene quando cerchiamo di scoprire che forma ha la curva che unisce tutti i punti situati alla stessa distanza (per esempio 4 unità) dal punto A. Sul piano a cui siamo abituati, la curva sarebbe un cerchio. Non però per un taxista! I punti D, E, F,G, H sono tutti alla stessa distanza, 4, da A. Costituiscono quindi un quarto di "circonferenza del taxista" di raggio 4. La circonferenza intera avrebbe la forma di un quadrato messo per traverso.
Inoltre d(A,C)+d(C,B) dovrebbe essere ≥ di d(A,B) e invece è eguale. Eppure i tre punti A, B, C non sono per nulla allineati. Questo concetto di distanza è dunque accettabile per un pelo. In compenso la distanza è simmetrica, e d(A,A)=0.
Importa? Importa, per esempio se dovete pagare la corsa del taxi. Il costo è proporzionale alla "distanza del taxista", non alla "distanza euclidea".

In montagna, le distanze sono misurate in ore. Considerate che dei buoni camminatori dicono che la distanza dovrebbe valere dieci minuti per uno spostamento di un kilometro in piano e dieci minuti per 100 m di dislivello in salita. In altre parole se vi spostate di 1 km (sulla carta) salendo di 100 m, il tempo richiesto risulterebbe di 20 minuti. Ma ci vorrebbero solo 5 minuti per 1000 m di spostamento accoppiati a 100 m di dislivello in discesa. Avremmo quindi una distanza che non rispetterebbe la regola fondamentale che d(A,B) = d(B,A) e due montanari potrebbero benissimo mettersi a distanza diversa l'uno dall'altro, ciò che sembra quasi una barzelletta. L'unico modo di evitare la dissimmetria è quello di calcolare le distanze sempre solo dal punto più basso al punto più alto.

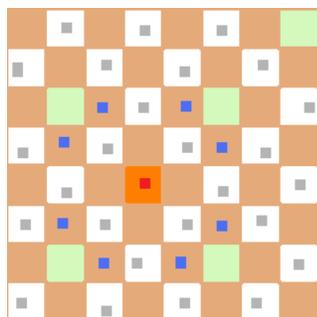
Su una montagna semplificata come una scalinata simmetrica, allora,  basta disegnare un quarto di “cerchio”. Ogni gradino in figura è largo 50 m e alto 50 m. I tre punti B, C, D sono a eguale distanza, dieci minuti,  dal punto  A, e quindi sono su un “cerchio”.

Un’altra distanza ancora è data dal gioco degli scacchi. La distanza di due pezzi sulla scacchiera seguendo le mosse del Re (per l’amor del cielo non quelle del Cavallo!) non è la distanza Euclidea.

Le caselle  contrassegnate da un punto rosso sono tutti allo stesso numero di mosse del Re, cioè alla stessa distanza, dalla casella centrale blu. Un celebre esempio in cui è utile questa distanza è quando in un finale di re e pedone bianchi contro re nero, con re bianco lontano,  si vuol sapere se il re nero può raggiungere il pedone prima che questo arrivi a Dama.

La regola è: “Se il re, muovendo, entra nel quadrato che ha per lato la distanza dal pedone a dama, riuscirà a fermare il pedone, altrimenti no”.

Nel caso in figura, se il re nero riuscirà o no a fermare il pedone bianco dipende da chi deve muovere. Se tocca al nero, il re entrerà nel quadrato, e fermerà il pedone. Se tocca al bianco, niente da fare.

Come definiremmo le tre distanze che abbiamo visto? La distanza di un punto A(x,y) dall'origine è facile.

1) distanza "**del taxista**" (o Taxicab, o Manhattan): d(0,A) = |x| + |y|, dove |x| o |y| indica il valore assoluto, cioè valore sempre positivo di un numero positivo o negativo quando non si tenga conto del segno.
2) distanza di **Montagna:**
$d(0,A) = \sqrt{(x^2+y^2)} + \Delta$ , dove Δ vale 10 × (dislivello in salita in unità di 100 m)
La componente x, y della distanza è misurata in 10 min per km.
3) distanza del **Re di scacchi** (o di Cebyshòf): d (0,a)= Massimo tra (x, y).

Provare a definire le distanze fra due punti qualsiasi $A_1$ e $A_2$ per queste tre distanze.

E magari studiate la scacchiera qui sotto, in cui indicate in blu le caselle sulla "circonferenza del Cavallo" di raggio 1 dalla casella rossa, ed in grigio quelle sulla "circonferenza del Cavallo" di raggio 2. La prima circonferenza è di sole caselle scure, la seconda di sole caselle bianche – ma non proprio tutte (mancano le caselle verdi, che sono a distanza 4 dalla casella rossa).

## L. LA MATEMATICA DELLA SCALOGNA.

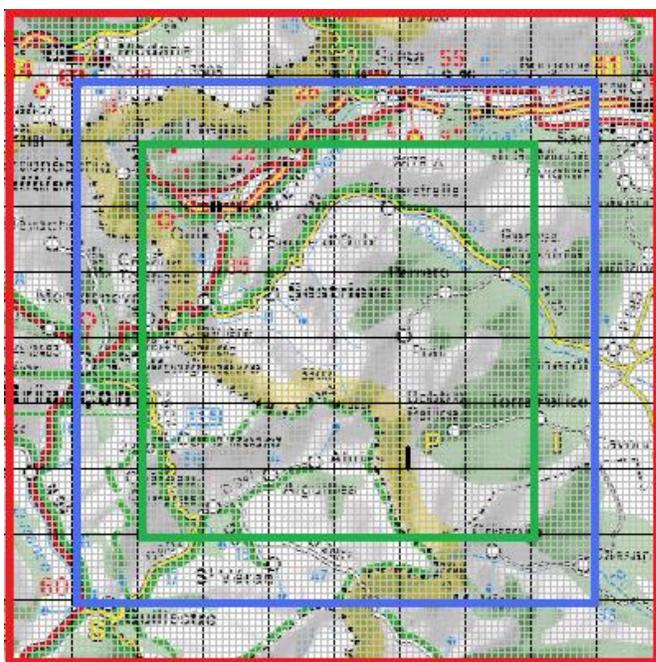
L’affermazione originale della famosa “Legge di Murphy” è:”Se qualcosa può andar male, lo farà”. Molti, guardandosi intorno, aggiungerebbero “…a me in particolare”. E’ il modo sbagliato di guardare il mondo. In molti casi, se le cose vanno in un modo irritante è semplicemente perché la probabilità che vadano come ci piace è inferiore a quella che vadano tutto al contrario. Non si può dire di essere sfortunati se le probabilità non ci sono favorevoli: non è sfortunato chi non vince alla lotteria. Semmai è fortunato chi vince.

Vorrei fare alcuni esempi:

**1) Le code al supermercato o in autostrada: “quella che scelgo io è sempre la più lenta”.**

Se in un supermercato voi scegliete alla cieca un’uscita su 10 possibili, ciascuna con la sua brava cassiera ed i clienti che aspettano con carrelli variamente carichi, e con code tutte più o meno lunghe eguali, avete solo una probabilità su dieci di aver scelto la coda che si dimostrerà più veloce. Ci dovrebbe consolare pensare che nove su dieci clienti non sono nella coda più veloce, esattamente come noi. Allo stesso modo, in un’autostrada a tre corsie per direzione abbiamo – in generale - solo una probabilità su tre di essere nella corsia più veloce rispetto alle due che ci affiancano. Di nuovo, due automobilisti su tre sono infelici pur non essendo sfortunati.

**2) Le carte topografiche. “Quando sono in viaggio, la zona di una carta stradale che mi interessa è sempre sul margine”.**

Anche questo è dovuto alla probabilità che ci sono contrarie nonostante a vista sembrino favorevoli o almeno neutre.

Se si sceglie un punto a caso nella mappa, la probabilità che esso si trovi in una data zona è data dal rapporto fra l'area della zona e l'area totale. Valutare l'area a occhio è ingannevole. L'area compresa fra il quadrato blu e quello rosso è 36%, più di un terzo del totale. L'area compresa fra il quadrato verde e quello rosso è il 52%, più della metà. Quindi abbiamo un po' meno di una possibilità su due si essere all'interno del quadrato verde, e un po' meno di due su tre di essere all'interno del quadrato blu. Non abbastanza da gridare alla scalogna se ci troviamo sul bordo.

**3) Se una fetta di pane imburrato cade, tende a cadere sulla faccia imburrata.**

Questo fu già notato in epoca vittoriana, quando evidentemente tutti prendevano il pane imburrato col the. Qui le ragioni sono assai più sottili. La fetta cade normalmente più o meno da un'altezza che è quella dei nostri tavoli. Questa a sua volta è legata alla nostra altezza, la quale, a sua volta, non è casuale, essendo legata all'equilibrio tra la resistenza delle ossa e la forza di gravità. La resistenza delle ossa è dettata dalle forze elettrostatiche che tengono lontani i nostri atomi e molecole e, in ultima analisi, dalla costante elettromagnetica che determina la forza delle interazioni elettromagnetiche. La faccia imburrata è normalmente la faccia superiore. Quando la fetta cade dal tavolo, per poco che non cada bella piatta, compie circa mezzo giro e così la faccia superiore si trova di sotto. Il mezzo giro è legato alla relazione tra l'altezza del tavolo e la forza di gravitazione alla superficie della terra, cioè, in ultima analisi, alla costante gravitazionale. Il rapporto tra le due costanti, elettromagnetica e gravitazionale, è un dato nella struttura del nostro universo. Insomma, la caduta sulla faccia imburrata è un fatto universale, progettato alle origini dell'universo, e considerarla una nostra particolare scalogna è come pensare di essere particolarmente scalognati perché d'inverno è più freddo che d'estate. A parte il fatto che un gatto cade sempre sulle quattro zampe, e c'è chi si chiede che cosa succederebbe ad imburrare la schiena di un gatto e poi farlo cadere. Alcuni parlano di moto perpetuo…

**4) Ho rinunciato a fare una gita domenica perché era predetto brutto tempo, e invece è stata una giornata bellissima.**

Questo succede più sovente di quanto non si creda, soprattutto perché in generale non è ben chiaro il discorso dell'attendibilità delle previsioni. Supponiamo che nella zona dove vogliamo fare la gita faccia brutto sessanta giorni all'anno (lasciamo perdere le sfumature di bello e di brutto tempo) . Supponiamo inoltre che la previsione del tempo sia attendibile al 90%. Ciò vuol dire che il servizio meteorologico in circa 54 giorni all'anno (90% di 60) prevede brutto tempo quando poi è effettivamente brutto tempo ed in circa 30 giorni all'anno (10% di 300) prevede brutto tempo quando poi c'è sole. In conclusione prevede brutto tempo 84 giorni all'anno, ma solo in 54 di essi effettivamente fa brutto. Cioè, quando il servizio meteorologico ci dice che farà brutto, la probabilità di brutto tempo non è del 90 per cento come avevamo creduto, ma solo 54/84, cioè circa 2 su 3. Di nuovo, non si può gridare alla scalogna se il tempo è poi stato bello. Da notare che quanto più pochi sono i giorni di brutto tempo, tanto più alta è la probabilità che faccia bello quando viene previsto brutto tempo (provate con altre percentuali). Non è poi così strano. In questo come in molti altri campi, un "tasso di successo" del 90%, per quanto apparentemente affidabile, non significa quello che sembra.

**Riassumendo:**

Dunque per le fette imburrate, la caduta sul lato sbagliato dipende da come è disegnato l'universo. Per i bordi delle mappe e per il bel tempo le probabilità "sulla carta" non sono favorevoli come sembrano. Per le code ci sono diverse possibili contromisure: la più ovvia è quella di cercare di valutare la lunghezza della coda non in numero di clienti ma in numero totale di oggetti che la cassiera dovrà registrare. Qui la fortuna non c'entra. E lo stesso vale per le corsie nelle autostrade. L'esperienza può insegnare quali corsie vanno evitate a seconda delle regole di circolazione, delle uscite e degli ingressi in autostrada, dell'ora etc. Dunque sì, ci sono i fortunati che si trovano per caso nella coda più veloce, ma nelle code più veloci ci sono anche quelli che pensano, il che non ha nulla a che fare con la fortuna. Tutti gli altri non sono particolarmente sfortunati, semplicemente non sono fortunati. Ma tra le due cose c'è un mare di differenza.

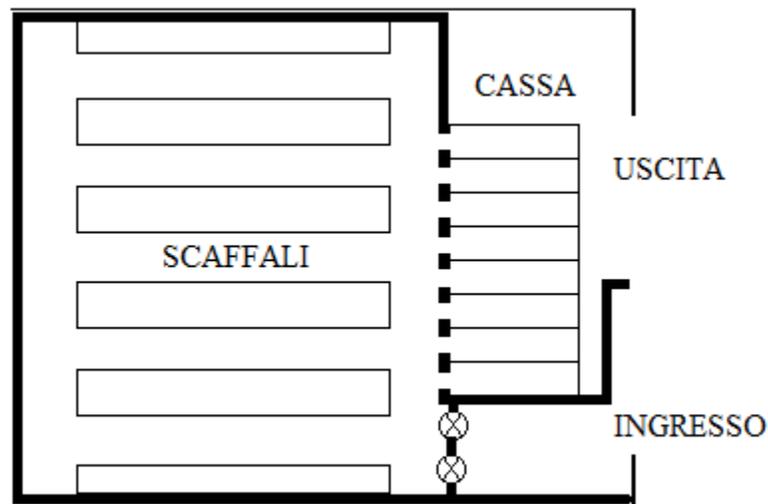
**NOTA 1 (sul "brutto tempo").**

La spiegazione del problema del brutto tempo aiuta a risolvere un altro problema, che ha meno a che vedere con la scalogna. Supponiamo di avere due scatole di dolci. In una (scatola A) ci sono10 cioccolatini e 30 gelatine di frutta, nell'altra (scatola B) ci sono 20 cioccolatini e 20 gelatine di frutta. Senza guardare la scatola prendiamo un dolce. E' una gelatina di frutta. Qual è la probabilità che abbiamo pescato dalla scatola A? A priori la probabilità di pescare da una delle due scatole è la stessa, ma adesso abbiamo qualche informazione in più. Il problema diventa ovvio se viene formulato in modo lievemente diverso: qual è la probabilità che la gelatina di frutta venga dalla scatola A? La risposta è che in tutto ci sono 50 gelatine di frutta, di cui 30 nella scatola A , cioè 30/50 del totale, e 20 nella scatola B. Dunque la probabilità che la gelatina venga dalla scatola A è 3/5, quella che venga dalla scatola B è 2/5. E questo risponde anche alla domanda "qual è la probabilità che abbiamo pescato dalla scatola A?". Quindi la probabilità a priori che era ½ di pescare in una delle due scatole, è diventata - a posteriori - 3/5 a vantaggio della A grazie al fatto nuovo, che abbiamo pescato una gelatina di frutta.
Questa tecnica, più o meno adattata a casi anche assai più complessi, ha larga applicazione in medicina, ad esempio nella diagnosi di malattie. Se riuscite positivi a un test (sicuro al 90%) se avete l'influenza, in base al ragionamento fatto, non significa che avete l'influenza col 90% di probabilità. Dipende anche da quanto è diffusa l'influenza. In ogni caso avrete l'influenza **al massimo** col 90% di probabilità ed in molti casi sarà assai meno probabile. Quindi, se sperate di avere l'influenza per evitare il compito in classe di matematica, non contateci troppo, tanto più che se tutta la classe ha l'influenza il compito in classe viene normalmente rimandato.

**NOTA 2 (sull'attesa in coda).**

Nessuno si stupirà ad apprendere che esiste una disciplina matematica che si chiama "Teoria delle code" , la quale ha un suo interesse e può raggiungere gradi notevoli di difficoltà.
Io mi limiterò a presentare un teorema non banale ma relativamente semplice e molto generale [[John Little, 1961]], che ci può illuminare su un certo numero di questioni.

Consideriamo uno schema di SUPERMERCATO. Non tutti sono fatti così, ma questo va bene per i nostri scopi. Inoltre, non sono solo i supermercati ad avere questo schema. Grandi negozi, banche, biglietterie di stazioni ferroviarie, autostrade, aereoporti ed altro in ultima analisi sono fatti così.
I clienti entrano dall'INGRESSO, restano nell'area SCAFFALI (se c'è) per un certo tempo, poi passano dalle varie code di CASSA ed escono attraverso l'USCITA. Le maiuscole indicano che la parola può applicarsi a qualsiasi altro sistema analogo, facendo i dovuti cambiamenti.

Supponiamo di metterci vicino all'ingresso, che per comodità mettiamo vicino all'uscita. Contiamo approssimativamente quanti clienti entrano ogni minuto, per esempio 6. A noi interessa un numero medio, quindi contiamo quanti clienti entrano in dieci minuti e poi dividiamo per dieci. Noto che se ci sono madre e figlio poppante insieme, il poppante non conta. Per due adulti dipende, se ci aspettiamo che si separino quando vagano per gli scaffali, nel qual caso li contiamo come due clienti, o se probabilmente staranno sempre insieme, nel qual caso contano per un solo cliente. E ci sono ancora diverse possibilità intermedie.

Ora andiamo all'uscita senza aspettare troppo tempo e seguendo le stesse regole contiamo quanta gente esce ogni minuto.

Adesso ci sono tre possibilità.

1) Entra più gente di quanta esca. Non possiamo parlare di una situazione "stazionaria", in cui per esempio il numero di clienti dentro al supermercato (che chiameremo N) è costante nel tempo anche se i clienti non sono sempre le stesse persone.
   Siamo per esempio in fase di apertura, ed N aumenta.
2) Entra tanta gente quanta ne esce, nel qual caso siamo in un caso "stazionario", e possiamo aspettarci che il numero di clienti dentro al supermercato sia più o meno costante.
3) Esce più gente di quanta ne entri. Di nuovo non siamo in situazione "stazionaria", ed il numero dei clienti all'interno decresce.

Il teorema di Little si applica solo al caso (2). Non è un disastro, perché negli altri due casi N cresce o decresce e quindi, a meno che non si vogliano fare studi molto dettagliati, interessa meno sapere quanto vale N ad un dato istante, visto che un minuto dopo sarà diverso.

Dunque la situazione è come segue:

(Persone che entrano in SUPERMERCATO ogni minuto) = (persone che entrano nell'area SCAFFALI ogni minuto) = (persone che escono da SCAFFALI ed entrano in CASSA ogni minuto) = (persone che escono da CASSA e da SUPERMERCATO ogni minuto).

Se queste eguaglianze non valessero, avremmo un problema. Per esempio, se entrassero in SUPERMERCATO più persone di quante ne escono da USCITA avremmo una montagna crescente di clienti (o più di una montagna) da qualche parte.
Ora il teorema di Little è difficile da dimostrare, ma facile da enunciare e relativamente facile da illustrare. Scegliamo la seconda via.
Questo è l'enunciato: in un caso "stazionario" come quello descritto, il numero N di clienti all'interno di SUPERMERCATO è dato dalla semplice espressione:

$$N = T/D$$

Da cui derivano:

$$D = \frac{T}{N} \; e \quad anche \quad T = N \cdot D$$

Dove D è l'intervallo medio di ingresso tra i clienti (nel nostro caso ne entrano 6 al minuto e quindi l'intervallo è 1/6 =0.167 minuti, 10 secondi) e T è il tempo di permanenza dei clienti in SUPERMERCATO. Tanto T quanto D devono essere misurati nelle stesse unità.

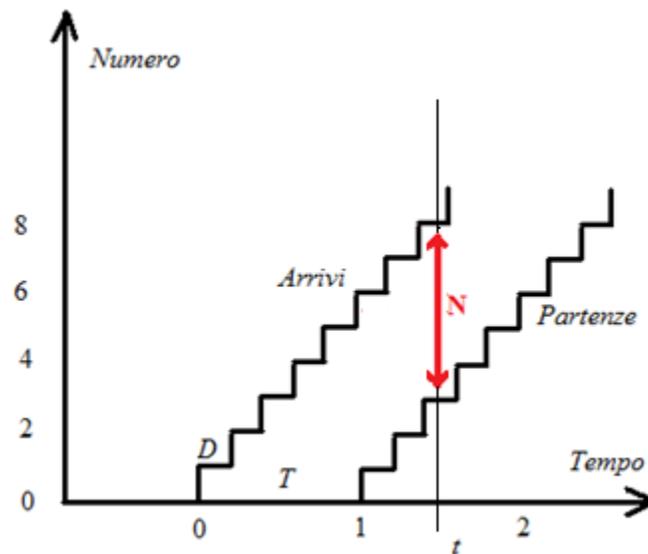
Se ci viene più facile, in luogo della variabile D possiamo usare la variabile r, il numero di clienti che entra per minuto. Come abbiamo visto, questo non è altro che

$$r = \frac{1}{D} clienti/minuto$$

Da cui:

$$N = r\ (clienti\ /minuto) \times T\ (minuti).$$

**Illustrazione.**

Supponiamo un caso elementare, in cui arriva in un negozio un cliente esattamente ogni due minuti e ogni cliente sta esattamente 10 minuti nel negozio. Nei primi dieci minuti il negozio si popola: cinque persone entrano prima che il primo esca. Dopodiché, per ogni cliente che esce ce n'è uno che entra e il numero di presenti resta costante. Questo numero è quello che si è costruito nel primo intervallo T di dieci minuti, perché in quel tempo sono entrati cinque clienti e nessuno è uscito. Naturalmente, 5 è dato da $r \cdot T = T/D$ , dove T = 10 e r = 0.5, ovvero D = 2. Forse la figura sottostante può aiutare:

La popolazione N al tempo t è data dalla differenza tra la linea degli arrivi (cumulativi) e quella delle partenze (cumulative) in quell'istante t. In figura, a partire da t = 1, è costante e vale 5.

Potete divertirvi a fare altri diagrammi a scaletta. Per esempio, ad un certo punto potete aumentare r, per esempio raddoppiandolo. Vedrete che N raddoppierà, impiegando un tempo T per farlo. Oppure potreste raddoppiare T passando a 2T. Anche qui, vedrete che N raddoppierà, impiegando il tempo 2T, che è il nuovo tempo di permanenza nel SUPERMERCATO.

**Applicazioni.**

Sul tempo medio di permanenza T certamente i SUPERMERCATI hanno statistiche dettagliate . Mettiamo che, inclusa l'attesa nelle code di CASSA, in un dato periodo di un dato giorno della settimana, T sia 20 minuti. Sulla base di r = 6 (cioè che entrano 6 clienti al minuto), questo vuol dire che nel SUPERMERCATO ci sono 120 clienti.

Se invece non conosciamo T, possiamo trovarlo contando quanti clienti ci sono nel supermercato. Supponiamo di trovarne 240, da cui risulta che il tempo medio di permanenza è 240/6 = 40 minuti. Magari è sabato, la gente compra per il week-end, e ci sono lunghe code alle uscite.

Applichiamo il teorema anche alle code nell'area di CASSA. Qui, considerando lo stesso caso, entrano ed escono ancora 6 clienti al minuto: se ne entrano di più di quanti ne escano, le code aumentano indefinitamente di lunghezza ed il manager del SUPERMERCATO farà bene ad aprire altri sportelli di cassa prima di essere linciato dai clienti.
Nell'area di CASSA entrano dunque 6 clienti al minuto, e ne devono uscire altrettanti.
Il manager, che conosce il tempo medio che occorre ad un cassiere per sbrigare un cliente, ha probabilmente messo al lavoro un numero di cassieri tale che tanti clienti entrino nell'area di CASSA, cioè nel SUPERMERCATO, quanti ne escono dall'area di CASSA. Questo lo ha fatto

quanto le code hanno incominciato ad allungarsi fuori controllo, ed hanno raggiunto un certo numero medio di membri, che incominciava a destare nervosismo, per esempio 5 (numero, notate bene, in questo caso arbitrario e dettato dall'esperienza e dalla situazione).
Una volta che il provvedimento di aggiungere cassieri è stato preso, se le condizioni non cambiano, il numero medio di persone in coda è N=5, e non muterà più. Supponiamo che il tempo per sbrigare un cliente sia di 2 minuti. In altre parole viene sbrigato mezzo cliente al minuto. Vale la relazione:

*(Numero di cassieri) × (0.5 clienti sbrigati al minuto) = 6 clienti al minuto.*

Quindi, per far uscire 6 clienti al minuto evidentemente dobbiamo avere 12 cassieri. Quando un cliente entra in coda, ha davanti a sé cinque persone, e il suo tempo di attesa sarà in media 2 minuti per cliente, 10 minuti in tutto.
Nell'area di CASSA ci sono ora 5 persone per ciascuna delle 12 code, per un totale di 60 persone, il che rispetta il teorema di Little, N = r T = 6 clienti/minuto × 10 minuti.
Dunque in questo caso, del tempo totale di permanenza nel SUPERMERCATO, solo 10 minuti passano aspettando in coda alla cassa.

Contando il numero di casse aperte ed il numero di clienti che entrano al minuto nel SUPERMERCATO possiamo sapere quanto tempo occorre per sbrigare un cliente medio da parte di un cassiere medio. Moltiplicando questo tempo per il numero medio di persone in coda per ogni coda, possiamo anche stimare quanto tempo dovremo attendere in coda, a meno di essere particolarmente fortunati/sfortunati – o a meno che il manager decida di aprire o chiudere altre casse.

Si vedono qui anche talune strategie che un SUPERMERCATO può adottare. Se, avendo già il locale normalmente affollato al limite della capienza, il manager desidera avere ancor più clienti in un giorno (quindi vuol accrescere r) deve, o aumentare l'area degli SCAFFALI per poter ricevere più persone, o diminuire T, il tempo di permanenza. Quindi, se mentre state bighellonando tra gli SCAFFALI vi si avvicina un impiegato che vi chiede cortesemente: "Posso aiutarla?", sapete in almeno 50% dei casi qual è il motivo della domanda. Oppure può essere semplicemente un impiegato ben educato e voi siete un vecchio dall'aria sperduta, o una ragazza carina.

Il teorema ha una varietà di applicazioni. Nel SUPERMERCATO della vita, supponiamo che in un Paese occorrano, in base a statistiche accurate, N=100 000 dentisti operativi contemporaneamente. Supponiamo che la vita professionale di un dentista sia T=40 anni in media. Quanti dentisti devono incominciare ad esercitare ogni anno? La risposta è immediata, ne occorrono r=2500/anno. Quindi se in un certo anno si presentano 25 000 candidati al corso di laurea in odontoiatria, già sappiamo che prima o poi solo la decima parte di questi candidati farà il dentista. Lo stesso vale per ogni professione ed attività in un Paese. E aggiungo che ogni Paese civile dovrebbe essere in possesso di statistiche adeguate, ricordando che un errore si manifesta in un tempo confrontabile con T, e lo si corregge in altrettanto tempo, se ci si riesce. Ad esempio, supponendo che il sistema produca solo 1500 dentisti ogni anno, ci si accorgerà del problema quando, diciamo, ci saranno 80000 dentisti invece di 100000. Ci vorranno (100000-80000)/(2500-1500) = 20 anni per rendersi conto del problema. Per tornare al numero necessario N= 100000 se ne dovranno produrre, ad esempio, 4000 all'anno per 5 anni, facendo attenzione

che questo ritmo non potrà reggere, altrimenti nel giro di 40 anni ci troveremo con 160000 dentisti invece dei 100000 che ci servono.

Tornando alla lunghezza della coda alla CASSA nel nostro vecchio modello, essa è più o meno determinata dal manager ed in un caso semplice come quello considerato ciò è probabilmente vero. Essa è, insomma, un dato che possiamo osservare, ma non ricavare. Esistono però dei modelli relativamente semplici che permettono di stabilire qual è la lunghezza della coda. In tal caso, questa non si forma per la decisione di una persona, ma perché i clienti non arrivano colla regolarità che abbiamo presunto. Quindi, dato un certo valor medio di frequenza di arrivo dei clienti, ogni tanto ci aspettiamo tempi morti, ed ogni tanto ci aspettiamo arrivi più frequenti. Gli arrivi più frequenti origineranno una coda.

Sono tentato di spiegare il più semplice di questi modelli. Tuttavia esso funziona solo se l'intervallo medio di arrivo fra clienti è maggiore del tempo che occorre per sbrigare un cliente. Inoltre il modello prevede sempre dei tempi morti in cui il cassiere è ozioso. Ciò non è sempre vero, e per questa ragione ho preferito dire che la lunghezza della coda è uno dei dati del problema.

## LI. DECIFRAZIONE

Un gioco che viene fatto sovente è quello di decifrare un messaggio nascosto.
La prima idea che viene in mente è quella di sostituire alle lettere dell'alfabeto altri simboli, o le stesse lettere dell'alfabeto in ordine diverso, in modo – ovviamente - che ogni lettera corrisponda ad una ed una sola lettera.

Ad esempio, ricevete il messaggio italiano cifrato

Come si fa a decifrarlo?
Sia ben chiaro che la scienza della criptografia (o dello scrivere messaggi nascosti) ha fatto enormi progressi, e nessuno si sognerebbe più di usare un sistema così semplice. Ma come gioco di società va ancora bene, e ci dà anche qualche insegnamento in più.

Quanto più lungo è il messaggio, in teoria tanto più facile è decifrare il messaggio cifrato con cifrature ingenue di questo tipo, perché esistono tavole di frequenze delle varie lettere, che ci dicono, per esempio, che in Italiano le lettere più frequenti sono, nell'ordine, E A I O N L R T S C D P etc. Se abbiamo un testo cifrato (lungo) in italiano e mettiamo in ordine di frequenza le lettere che lo compongono, dovremmo arrivare alla decifrazione con pochi tentativi, perché la lettera più frequente dovrebbe essere una E, la seconda in ordine di frequenza una A, la terza una I e via dicendo.
Devo dire che un po' di pazienza e più di un tentativo sono necessari. Magari ci vuole anche un computer (e un programma, magari in Qbasic, per contare le lettere).

| Frequenza standard (Wikipedia) | Dante Alighieri: "La Divina Commedia". Canto I. | De Amicis – "Cuore" Il primo giorno di scuola. | Salgari. "Le due Tigri", capo I, circa 5800 lettere |
|---|---|---|---|
| E | E | A | A |
| A | A | E | E |
| I | I | I | I |
| O | O | O | O |
| N | R | R | N |
| L | L | N | L |
| R | T | L | R |

Pur con un brano che conti diverse migliaia di lettere, una perfetta aderenza non la si ha. Salgari è decisamente il migliore, e lo scambio tra A e E potrebbe esser corretto subito. Ma, se avessimo cifrato un brano di De Amicis ed avessimo identificato il simbolo più frequente con la E, il quinto con la N, avremmo avuto qualche problema in più.

Nel nostro brano, abbiamo le seguenti ripetizioni, e adattandole alle frequenze otterremmo:

∞ ∞ ∞ ∞ E A
♣♣♣♣ A E

| | |
|---|---|
| ◊◊◊ | I O N |
| ☺☺☺ | O N I |
| ☻☻☻ | N I O |
| ▲▲ | L R T |
| ⊗⊗ | R L T |
| ●● | T L R |
| ☼ | S C D |
| ♠ | C D S |
| ♥ | D S C |

Ma il brano è troppo breve. Troppi simboli compaiono con la stessa frequenza. Scegliere l'ordine di frequenza non è facile.

Ci potrebbero allora aiutare le osservazioni
1) che le parole italiane polisillabiche tendono a terminare per vocale, quindi ♣ ◊ ☻ sarebbero vocali;
2) che prima di un apostrofe ci sta solo un C, D, L, M, N, S, T, V; mentre dopo l'apostrofe ci può essere solo una vocale;
3) che una lettera isolata può essere solo A, E, I , O;
4) il penultimo gruppo di due lettere, visto che la prima lettera è una vocale, può essere solo AD, AI, AL, ED, IL, IN, IO, OD,OH,

Eccetera. Ma, ripeto, il brano è troppo breve e in questo caso il lavoro che resta da fare è molto. In fine di sezione darò il testo originale, in caso qualcuno ci sia voluto provare.

Però, è chiaro che il testo è vulnerabile alla decifrazione quanto più è lungo.
Furono quindi escogitati sistemi assai più sicuri.

Nel Cinquecento si incominciò a pensare che il sistema in cui ad ogni lettera dell'alfabeto si sostituisce sempre la stessa lettera o simbolo fosse poco sicuro, proprio per la ragione indicata, che con metodi statistici si arriva presto alla decifrazione. Per cui si pensò ad inserire simboli che indicavano che era stata cambiata la cifratura. Nella forma più semplice possiamo supporre che vengano cifrati i ventun simboli dell'alfabeto Italiano in quelli dell'alfabeto inglese, che ha in più J K W X Y. I due che si scrivono possono avere per esempio cinque diverse tabelle di cifratura, ciascuna identificata con una delle lettere assenti in Italiano. Si può concordare che si incominci a cifrare con una tabella. Poi, quando piace al cifratore, questi inserisce uno di questi simboli assenti in italiano (cifrato o no a seconda della convenzione) il quale non fa parte del messaggio originale ma indica di passare ad una nuova tabella.
Leon Battista Alberti pensò ad uno strumento meccanico per avere a disposizione molte tabelle di cifratura. Si tratta dei "dischi cifranti". Su Wikipedia si può trovare un esempio di disco cifrante di Leon Battista Alberti, con semplici istruzioni per l'uso. Non so se Alberti (che, incidentalmente, era un genio) avesse notizia della possibilità di decifrazione con il metodo statistico, che certamente era stata già escogitata da studiosi arabi prima dei suoi tempi. Certo il suo sistema rende impossibile usare questo metodo di decifrazione indesiderata.

Per finire con le sostituzioni lettera per lettera, con una o più tabelle, indico un altro sistema, dovuto a Vigenère, non migliore di quello di Alberti. Occorre essenzialmente che i due che vogliono corrispondere tra loro abbiano in mente o una parola o una frase. Per esempio, si voglia cifrare la frase “domenica piove”. Vi si scrive sotto la frase concordata MILANINTER, lettera per lettera, quante volte basta.

D O M E N I C A P I O V E
M i l a n i n t e r m i l

Poi bisogna codificare messaggio. Se sotto alla D di domenica troviamo la M di Milan, ciò vuol dire che dobbiamo usare per la codificazione della D un alfabeto in cui la M corrisponde alla A, e quindi la D alla terza lettera dopo la M, cioè P. Vigenère, per aiutare il cifratore, costruì la tabella qui di seguito (che è facilissima a farsi da soli).

La lettera da cifrare è data nella prima riga. L’alfabeto da usare è quello dato nella riga che incomincia con la lettera della “chiave” milaninter che sta sotto la lettera del messaggio da cifrare.
Quindi la prima lettera del messaggio cifrato è P e la seconda è W

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A
C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B
D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C
E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D
F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E

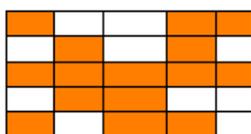
G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F
H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G
I J K L M N O P Q R S T U V **W** X Y Z A B C D E F G H
J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I
K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J
L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K
M N O **P** Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L
N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M
O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N
P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O
Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P
R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q
S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R
T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S
U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T
V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U
W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V
X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W
Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X
Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y

Per decifrare si compie il cammino inverso, sempre scrivendo sotto al messaggio cifrato la frase MILANINTER ripetuta quanto basta e andando a cercare a quale lettera della prima riga corrisponde la lettera da decifrare nella riga che incomincia con la lettera sottostante della frase chiave.

Altro sistema è la griglia.
In questo caso i due che vogliono corrispondere segretamente hanno entrambi una maschera o griglia da porre sul messaggio.

Giorgio manda a Giacomo il messaggio (non è detto che debba essere in un quadrato, che insospettisce). In questo caso, abbiamo un quadrato e Giacomo sa che deve mettere le varie lettere in quadrato.

| E | V | A | R | I |
|---|---|---|---|---|
| D | E | O | F | A |
| F | I | N | T | A |
| L | A | N | C | I |
| A | N | O | M | E |

Poi mette su questo quadrato la sua brava griglia, che tiene in un cassetto.

e il messaggio risulta chiaro, “Vado al cine”.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | V | A | | |
| D | | O | | A |
| | | | | |
| L | | | C | I |
| | N | | | E |

Evidentemente non c’è nessuna ragione di inviare il messaggio sotto forma di griglia quadrata invece che lineare. In realtà ci sono piuttosto molte ragioni per non disporre il messaggio in una griglia quadrata. Basta sapere, ad esempio, che la griglia è 5 x 5 e le 25 lettere possono essere inviate in messaggio lineare. Poi chi le riceve le mette in una griglia 5 x 5 e applica la sua maschera. In fin dei conti l’obiettivo è solo quello di selezionare in qualche modo le lettere interessanti del messaggio. A rigore si può pensare che i due soci usino come griglia la frase chiave, che solo loro conoscono essendosi messi d’accordo una volta per tutte, “Nel mezzo del cammin di nostra vita”. Si può allora scrivere questa frase sotto il messaggio cifrato avendo pure concordato che - per esempio - solo le lettere sopra alle vocali contano. In questo caso la griglia manco esiste concretamente. Il messaggio potrebbe essere allora:
*“evita, ladro, i vari loschi piani e va’”*, in cui si ignorano spazi, segni di interpunzione, apostrofi.

e v i t a l a d r o i v a r i l o s c h i p i a n i e v a
N E L M E Z Z O D E L C A M M I N D I N O S T R A V I T A

Sopra alle vocali della frase chiave troviamo il messaggio : *“vado al cine”.*

In molte istituzioni che volevano evitare lo spionaggio, fino a che non fu introdotta la crittografia a macchina od elettronica, vigeva un altro sistema di cifratura che si poteva fare a mano.
Le due parti avevano una specie di dizionario segreto, in cui ad ogni parola corrispondeva un gruppo, per esempio di cinque cifre.
Per esempio a “Ministero” corrispondeva il gruppo “54321”. Poi, ogni mese o anche più frequentemente, i due corrispondenti si comunicavano un numero segreto di cinque cifre, ad esempio 87861. Nel cifrare a mano il messaggio si doveva sommare a tutti i gruppi di cinque cifre il numero segreto 87861, **ma senza eseguire riporti**, cifra per cifra. Se vogliamo era una somma “modulo 10”. Quindi “Ministero” diventava 54321 + 87861 = 31182. Il mese dopo, magari, il numero segreto era 98687, e “Ministero” diventava 54321 + 98687 = 42908. Per decifrare non si aveva che sottrarre al messaggio cifrato lo stesso numero 98687 o 87861, cifra per cifra, aggiungendo dieci al minuendo se necessario. Eventuali curiosi dovevano avere una copia del dizionario ed una copia dei numeri segreti che venivano regolarmente sostituiti, per leggere i messaggi cifrati.

SOLUZIONE:

Il messaggio
⨂∞●☺☻ ▲’∞☼♠♣ ◙♣◊☺☻♥◊ ◊ ♣▲ ⨂∞◙♣☺∞●☻
è il primo verso della Gerusalemme Liberata: “*Canto l’armi pietose e il Capitano*”.

## LII.   PIU' SERIAMENTE.

Qualcuno avrà sentito parlare di modi di cifrare e decifrare in cui entrano i numeri primi. I numeri primi entrano in questo gioco perché sono degli esseri straordinari, e credo che i metodi in cui entrano i numeri primi siano oggi quelli più usati per costruire dei sistemi di cifra seri.

In tutti i casi visti più sopra, entrambi i corrispondenti hanno la stessa chiave, sia essa la tabella di sostituzione, più o meno complessa,  il disco ruotante, la parola o frase chiave, la griglia, il dizionario col numero di codice segreto.
Tutti questi sistemi ricadono nel seguente schema. Giorgio e Giacomo si sono provveduti di chiavi identiche. Giacomo scrive il suo messaggio, lo chiude in una scatola con un lucchetto, chiude il lucchetto (queste due operazioni corrispondono alla cifratura), manda la scatola (che magari si autodistrugge se si tenta di aprirla con la chiave sbagliata). Giorgio riceve la scatola, apre il lucchetto con la chiave (questa operazione corrisponde alla decifrazione), legge il messaggio.
Il problema è che due persone hanno due chiavi identiche. Quindi il sistema è doppiamente vulnerabile.

Si incominciò quindi a studiare la possibilità di creare una situazione alquanto diversa.
Giorgio ha un lucchetto con la sua chiave, che Giacomo non ha e non ha mai visto; Giacomo ha un lucchetto con la sua chiave, che Giorgio non ha mai visto. Se Giorgio vuol ricevere un messaggio da Giacomo gli manda anzitutto la sua scatola con il suo lucchetto aperto. Giacomo ci mette il suo messaggio e chiude il lucchetto. Notate che per chiudere il lucchetto non c'è bisogno della chiave. Poi Giacomo manda a Giorgio la scatola col lucchetto chiuso, che Giorgio aprirà con la chiave che lui solo ha.

A questo punto arrivano i numeri primi.

Come abbiamo detto, scomporre un numero in fattori primi (ed eventualmente scoprire che è primo) non è uno scherzo. Il tempo di analisi, usando i sistemi più rozzi, viene semplicemente moltiplicato per tre ad ogni cifra che aggiungiamo (ricordate che  in linea di principio dobbiamo analizzare tutti i numeri primi fino alla radice quadrata del numero, e tre è circa la radice quadrata di dieci). Nel 2005  il numero più grande, non primo, completamente fattorizzato era di 200 cifre.
Invece è relativamente facile moltiplicare tra loro numeri primi, anche di cento cifre. Per la cronaca, il numero primo più grande che si conosca oggi (2010) ha circa 12 milioni di cifre, ma il fatto che è primo non viene scoperto attraverso la fattorizzazione. Si usano test molto ingegnosi che rivelano direttamente se il numero è primo o no, ma qui non li vedremo. In ogni caso QBasic arriva solo a 20 cifre esatte.

Nel nostro esempio useremo numeri primi piccoli.
Incominciamo col dire che i due che vogliono scriversi, Giorgio e Giacomo,  hanno entrambi una tavola in cui  i messaggi sono tutti numeri di poche cifre. Se il messaggio riguarda che cosa farà Giacomo domenica, i messaggi possono essere
1 =  vado colla mia famiglia; 2= vado in piscina; 3= non so; 4 = sto a casa; 5 = vado alla partita; 6 = museo; eccetera.

Ma ancora, il messaggio è qui di una cifra solo per non fare calcoli troppo lunghi.

Giorgio vuole mandare la scatola col lucchetto aperto a Giacomo.
Per costruire il lucchetto aperto, gli occorre un numero N che sia il prodotto di due numeri primi. In linea di principio si scelgono due numeri primi enormi. Noi scegliamo 3 e 5. Il prodotto è N = 15. Anche se non è consigliato farlo, lo possiamo gridare sui tetti (soprattutto se non è 15 ma ha duecento cifre, perché allora scomporlo in fattori primi sarà duro). Adesso calcoliamo Φ(15). Anche se i due numeri primi fossero assai grandi, noi sapremmo (he he) che Φ(3x5)= (p-1)(q-1) = 2 x 4= 8.
Questo 8 lo conosciamo solo noi, perché solo noi sappiamo fattorizzare N.

Ora ci occorre un numero che sia più piccolo di Φ = 8 e primo con 8. Noi scegliamo 3 (che chiameremo in generale E). Il "lucchetto aperto" è costituito da due numeri (N, E), nel nostro caso (15,3), di cui "nessuno" sa se 15 sia primo e quali siano i suoi fattori e quindi nessuno sa quale sia la Φ. Tutti possono però conoscere 15. In particolare lo conosce Giacomo (che però neanche lui conosce i fattori). Inoltre, di numeri primi con 3 ne esistono diversi, e di qui non possiamo risalire alla Φ.
Inutile aggiungere che se invece di (15,3) mandassimo a Giacomo il numero 135, da cui lui potrebbe immediatamente ricavare 15 e 3, i problemi degli eventuali curiosi aumenterebbero.

Ora Giacomo ha il lucchetto aperto, non ha che mettere il messaggio nella scatola e chiudere. Questa operazione è quello che si chiama "cifrare il messaggio".
Supponiamo che Giacomo voglia mandare il messaggio M=3 ("non so").
Il messaggio cifrato, C, è il resto della divisione di $M^E$ per 15 (che è il nostro N). I matematici scriverebbero con bella notazione C = $3^3$ mod 15.
$3^3$ vale 27 ed il resto della divisione per 15 è 12. Questo 12 è dunque il messaggio cifrato C. Giorgio riceve il "lucchetto chiuso" o messaggio cifrato C, ovvero 12.

Ora a Giorgio occorre la chiave.
Per fabbricare la chiave gli occorre un numero D tale che (ED -1) sia divisibile per Φ , cioè 8, ricordando che E=3. Per tentativi troviamo 3 (cioè verifichiamo se 3-1, 3 x 2 -1, 3 x 3-1, etc. siano divisibili per 8). Ma già 9-1 è divisibile per 8.
Questo secondo numero 3, D, lo sappiamo solo noi (o lo sa solo Giorgio), perché per trovarlo abbiamo usato la Φ = 8, che solo noi conosciamo.

Per aprire il lucchetto, Giorgio deve soltanto calcolare il resto della divisione di $C^D$ per 15, cioè esegue $12^3$ mod 15, e trova che 1728/15 dà resto 3, che era appunto il messaggio M originale. Valeva certamente la pena fare tutti questi conti per scoprire che Giacomo non sa cosa farà domenica!

Noto intanto che D=11 va ancora bene, perché 3x11-1 =32 è divisibile per 8. Andrebbe bene per decifrare il messaggio cifrato C=12? Cioè, $12^{11}$/15, dà resto 3? Ma certo. Il problema è che numeri anche così piccoli ($12^{11}$ = 743 008 370 688) già sfuggono a QBasic, nel senso che ci darebbe dei risultati approssimati. Google ce la fa appena.

Che cosa dovrebbe fare uno che volesse decifrare il messaggio 12 senza conoscere D? Lui conosce 3 e 15. Semplice, deve trovare un numero M tale che $M^3$ - 12 sia divisibile per 15.

Anche qui, si provano ordinatamente diversi M e si vede se il loro cubo meno 12 è divisibile per 15. Ora:
M=1  1-12 non è divisibile per 15
M=2  8-12 non è divisibile per 15
M=3  27 -12 =15, è divisibile per 15.
Quindi M=3. E adesso anche il curioso, se ha in mano sua la tabella delle corrispondenza numeri-messaggi, sa che Giacomo non sa cosa fare domenica. Sempre utile a sapersi.
Il curioso può anche usare un'altra via, cioè trovarsi la D da solo, se riesce a scoprire con lunghi calcoli che 15 = 3 x 5, Φ =8, e D deve essere tale che 3D-1 sia divisibile per 8.

La difficoltà nasce dal fatto che appena i numeri sono un po' grandi, i calcoli che il curioso deve fare diventano proibitivi. Il metodo si chiama "Algoritmo RSA", dai nomi dei tre inventori, Rivest, Shamir, Adleman. Se andate su Wikipedia.com (inglese) e cercate "RSA algorithm" (e sapete l'inglese) trovate un esempio svolto, in cui N = 61 x 53=3233, Φ = 60 x 52 = 3120, E = 17. Anche per Giorgio, trovare D non è banale. Dobbiamo ora risolvere l'equazione
17×D-1 = k×3120. Ora la soluzione è D = 2753.
Il modo più semplice di ottenere D è moltiplicare 3120 per 1,2,3,4,5…, aggiungere 1 ogni volta, e vedere se il risultato è divisibile per 17, e qual è questo risultato. Incomincia ad essere un bel lavoro, a farlo a mano, ma è ancora facile da fare con un normale PC. Ci sono anche altri metodi più rapidi.

Nell'esempio di Wikipedia, M = 123, C, il messaggio cifrato, è…il resto della divisione di $123^{17}$ per 3233. I numeri, anche se così piccoli, sono ormai fuori della portata dei normali programmi. Neanche Google ce la fa più e deve dare un risultato approssimato, che non serve più a nulla. Comunque con un buon programma si trova che C= 855. Giorgio adesso deve trovare il resto della divisione per 3233 di $855^{2753}$ ….. Auguri!

Abbiamo dunque due problemi:
1) capire perché il metodo funziona;
2) vedere come calcolare $A^{B}$ mod C rapidamente. Appena si va in numeri primi di due cifre, si incomincia ad uscire dalle possibilità dei programmi meno sofisticati. Un programma come Mathematica (ma non è precisamente gratuito) fa conti del genere in quattro e quattr'otto.

Per quel che riguarda (1), se ci ricordiamo il piccolo teorema di Fermat esteso a numeri non primi, notiamo che $A^{\Phi(N)}$ =1 mod N. Cioè il resto della divisione di $A^{\Phi(N)}$ per N dà 1, se A è primo con N. Nel nostro caso A ha solo due fattori primi, p, q.
Chiamando **$C = M^E$ mod N** (ovvero il resto di $M^E$ diviso N) il messaggio cifrato, l'operazione richiesta per decifrare C non è altro che

$$C^D \bmod N = M^{\underline{ED}} \bmod N = M^{(1+k\Phi)} \bmod N = M\, M^{k\Phi} \bmod N = M\, (M^{\Phi})^k \bmod N,$$

indicando con Φ la Φ(N).
Ma, come abbiamo indicato, $M^{\Phi}$/N dà resto 1, ovvero $M^{\Phi}$ = 1 mod N e la sua potenza $(M^{\Phi})^k$ mod N sarà evidentemente ancora 1.

Da cui:

$$C^D \bmod N = (M^E)^D \bmod N = \ldots = M.$$

Francamente, però, io credo che i metodi di cifratura basati sulla scomposizione in fattori primi si basino troppo sul fatto che il "curioso" non sia in grado di effettuare una scomposizione in fattori primi di numeri enormi. Ma che ne sappiamo? Magari lui si è comprato l'ultimo prototipo di calcolatore che può scomporre numeri di questo tipo, e allora siamo fritti. Quindi penso che il futuro della cifratura non sia in questa direzione.

Restava da dire come si potrebbe fare a trovare il resto dell'elevazione a potenza di due numeri abbastanza grandi da spaventarci.
Per esempio, si voglia trovare il resto della divisione di $13^{112}$ per 113.
Ora, $13^{112}$ è un numerino niente male, 124 cifre:
577637604624411039196296063867178084028385646000414838781127826441848679966803
6454334543741320404101515448754373815708983 6481.
Dovremmo dividerlo per 113 e trovare il resto. Questo sarebbe il metodo di forza bruta, che però riesce, a parte il fatto che trovare il numerino niente male richiede o molta pazienza o un programma niente male.

Ma si può far di meglio della forza bruta.

Se noi conosciamo le successive potenze di due (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc.) intanto possiamo sempre scrivere qualsiasi numero (in questo caso l'esponente 112) come somma di queste potenze. Questo equivale a scriverlo in base due.
Se non sappiamo queste cose, vediamo che in 112 certo ci sta un 64; ci resta 48. Da 48 posssiamo togliere 32, ci resta 16. 16 è uno dei numeri della nostra tabellina di potenze di 2.
Quindi possiamo scrivere 112=64+32+16. E quindi $\mathbf{13^{112}=13^{64}13^{32}13^{16}}$.

Alternativamente possiamo usare il nostro arsenale di conoscenze sul calcolo con basi diverse da 10, in questo caso 2, scriviamo l'esponente 112 in base 2. Sappiamo come fare.

Dividendo 112 per 2 si trova 56, resto 0
Dividendo 56 per 2 si trova 28, resto 0
Dividendo 28 per 2 si trova 14, resto 0
Dividendo 14 per 2 si trova 7, resto 0
Dividendo 7 per 2 si trova 3, resto 1
Dividendo 3per 2 si trova 1 resto 1
Dividendo 1 per 2 si trova 0, resto 1.

L'esponente in base binaria, elencando i resti a partire dall'ultimo trovato, è **1110000**, che (e questo era lo scopo dell'esercizio) possiamo scrivere come $2^4+2^5+2^6 = 16 + 32 + 64 = 112$.
$13^{112} = 13^{64+32+16}$ è quindi il prodotto di tre fattori che hanno tutti 13 come base, e come esponenti potenze di 2 cioè $\mathbf{13^{64}13^{32}13^{16}}$. Una scomposizione del genere è sempre possibile, perché un numero qualsiasi può sempre essere scritto in base 2 (o altra base a piacere).

Adesso siamo pronti a partire. Il resto di 13 elevato a 1, cioè $2^0$ è 13.
Eleviamo al quadrato. Ora $13^2 = 169$ e il resto della divisione per 113 è 56.

Il resto di $13^4$ è il quadrato del resto precedente, 56 x 56 =3136 che, diviso ancora per 113, dà come resto 85.
Il resto di $13^8$ è il quadrato del resto precedente, 85 x 85 = 7225, che, diviso ancora per 113, dà come resto 106.
Il resto di **$13^{16}$** è il quadrato del resto precedente, 106 x 106 =11236. Il nuovo resto è **49**. Questo ce lo teniamo da parte perché è uno dei tre fattori di $13^{112}$.
Il resto di **$13^{32}$** viene da 49 x 49 =2401, il cui resto della divisione per 113 è **28**. Teniamo anche questo.
Infine il resto di **$10^{64}$** viene da 28 x 28= 784, con nuovo resto **106**. E ci teniamo anche questo.

Il resto dei resti è il resto del prodotto **49 x 28 x 106** diviso 113.
Credeteci o no, il resto è 1, come avremmo dovuto sapere, visto che 13 e 113 sono primi (e primi fra loro). Naturalmente, abbiamo potuto svolgere questo esercizio solo perché questo numero, lungo e in cui le cifre si susseguono senza ordine apparente, può esser scritto come $13^{112}$.

Dunque per trovare il resto di $A^B$ mod C :
1) scomporre l'esponente B in potenze di due (o per semplice sottrazioni successive o scrivendolo in forma binaria, il che ci permette di sapere quali potenze di 2 intervengono nell'esponente). Scomponendo l'esponente in una somma di potenze di 2 noi scomponiamo al tempo stesso la potenza $A^B$ in un prodotto di potenze della stessa base i cui esponenti sono tutti potenze di 2.
2) calcolare i resti della divisione per C delle successive potenze A, $A^2$, $A^4$, $A^{16}$ etc. e tutte le altre
3) calcolare il resto del prodotto dei fattori che entrano in $A^B$.

Con questi pochi, ma intelligenti calcoli, tutti fattibili a mano o con una piccola calcolatrice, avete trovato il resto della divisione di
577637604624411039196296063867178084028385646000414838781127826441848679966803
64543345437413204041015154487543738157089836481
per 113.

Di che riempire di conti un foglio lungo più di un metro, se scrivete piccolo. Io dico che se avete capito il procedimento e lo potete ripetere con altri giganti del genere, potete essere fieri di voi stessi, un po' come i cavalieri erranti che domavano giganti o dragoni che sputavano fuoco.

Se non vi è passata la paura dei numeri questa volta….

## LIII. CHE LINGUA E'?

Facciamo ora una tabella della frequenza delle vocali in varie lingue. Su Internet si trovano svariate di queste tabelle (sfortunatamente abbastanza diverse).

Ad esempio:

| | Spagnolo | Francese | Inglese | Latino | Italiano |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.111 | 0.080 | 0.080 | 0.072 | 0.117 |
| E | 0.130 | 0.167 | 0.124 | 0.092 | 0.117 |
| I | 0.082 | 0.076 | 0.067 | 0.101 | 0.113 |
| O | 0.097 | 0.058 | 0.076 | 0.044 | 0.087 |
| U | 0.036 | 0.027 | 0.027 | 0.074 | 0.027 |

Per frequenza intendo il rapporto fra, per esempio, il numero di A ed il numero totale di caratteri.

Adesso scegliamo un brano in una lingua qualunque, e vediamo le frequenze risultanti.

Fra l'altro possiamo fare un programma in QBasic che conti le vocali soltanto. Un programma molto rudimentale è fatto così:

***PROGRAMMA NUMERO 9 IN QBASIC: CONTEGGIO DI VOCALI IN UN BRANO***

```
CLS
REM CONTEGGIO DI VOCALI  (A, E,I O, U) IN UN  BRANO
CONTA = 0.0
CONTE = 0.0
CONTI = 0.0
CONTO = 0.0
CONTU = 0.0
INPUT "Brano?", BRANO$
L = LEN(BRANO$)
FOR I=1 TO L
IF MID$(BRANO$,I,1)= "A" THEN CONTA =CONTA+1
IF MID$(BRANO$,I,1)= "E" THEN CONTE =CONTE+1
IF MID$(BRANO$,I,1)= "I" THEN CONTI =CONTI+1
IF MID$(BRANO$,I,1)= "O" THEN CONTO =CONTO+1
IF MID$(BRANO$,I,1)= "U" THEN CONTU =CONTU+1
NEXT I
PRINT "A = ", CONTA, CONTA/L
PRINT "E = ", CONTE, CONTE/L
PRINT "I = ", CONTI, CONTI/L
PRINT "O = ", CONTO, CONTO/L
PRINT "U = ", CONTU, CONTU/L
```

Il blocco rosa azzera i contatori delle varie vocali.
L'istruzione azzurra chiede di introdurre un brano. Basic accetta fino a 36000 caratteri. In più suggerisco di togliere gli spazi ed i segni di interpunzione e gli accenti.

Il ciclo verde  (FOR…NEXT) paragona ad uno ad uno i caratteri del brano alle cinque vocali e aumenta i conteggi di una data vocale quanto la trova.
Il ciclo giallo stampa i risultati, cioè scrive sullo schermo, in ordine :vocale, numero di volte che la vocale è stata trovata la vocale nel brano, numero di volte/ lunghezza del brano (L), cioè  la frequenza.  .

Io ho introdotto un brano di 104 lettere (avendo tolto gli spazi e virgole) ed ho trovato le seguenti frequenze:

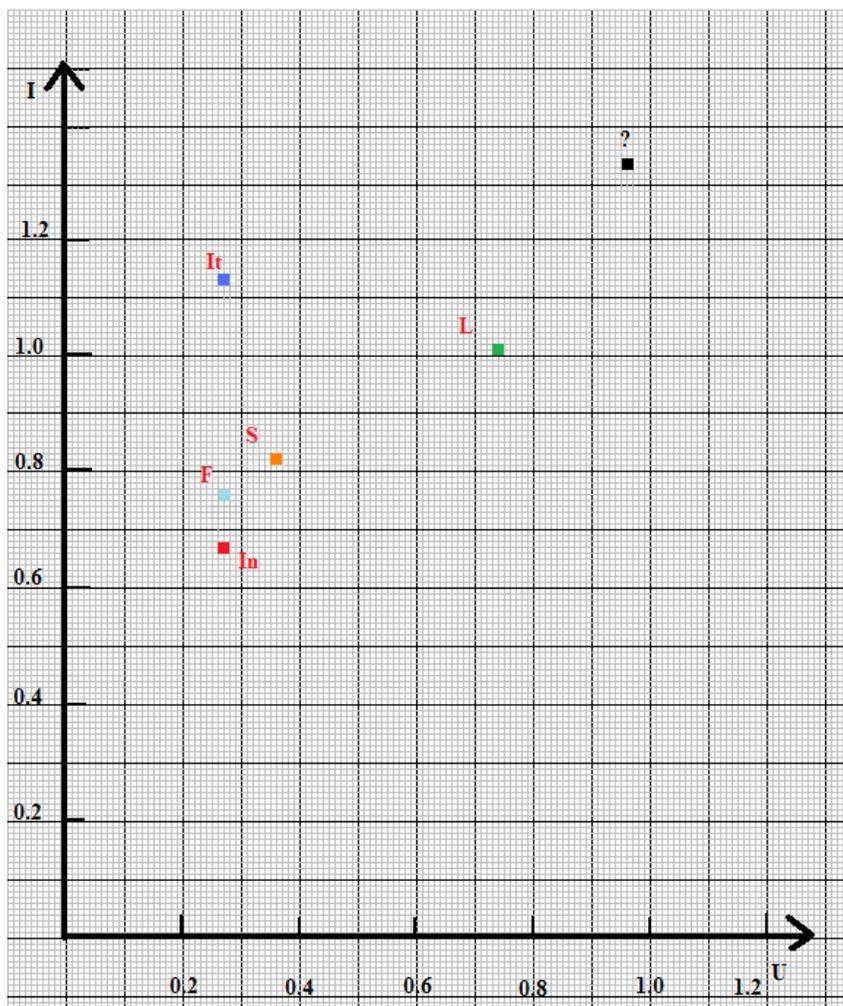
| Vocale | Frequenza |
|---|---|
| A | 0.0865 |
| E | 0.0577 |
| I | 0.1346 |
| O | 0.0577 |
| U | 0.0961 |

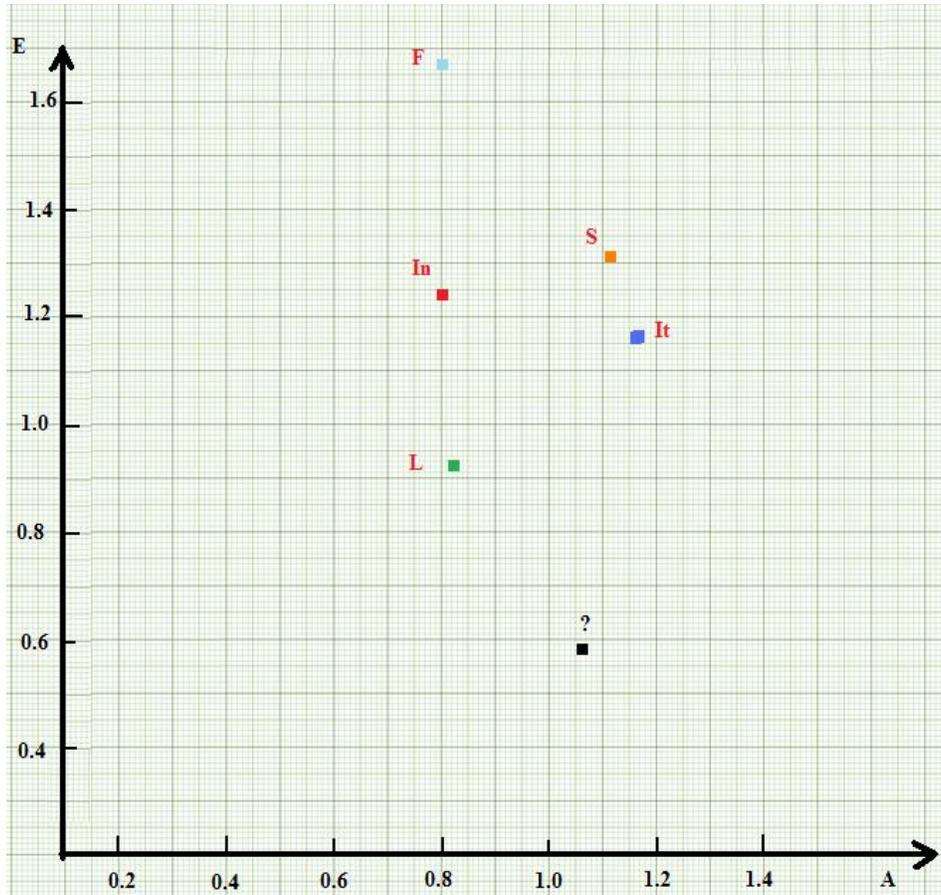
Adesso come si fa a capire in che lingua era il brano che ho introdotto?
Qui possiamo fare varie proposte. Per esempio, uno potrebbe dire: una lingua per volta, facciamo la differenza fra le frequenze del brano ignoto e quelle della lingua in esame, vocale per vocale. Poi sommiamo le differenze. La lingua che ha la differenza totale minima è probabilmente la lingua ignota.

CHIUDERE IL LIBRO E PENSARE.

Questo metodo è ragionevole, ma non tiene conto del fatto che ci possono essere scarti sia in senso positivo che in senso negativo. Due lingue i cui scarti per le cinque vocali fossero +3,-2, 1,-2,0  darebbero uno scarto totale 0, spingendoci a concludere che si tratta della stessa lingua, mentre due lingue con scarti 0.2,-0.3,+0.1,+0.1,+0,1  darebbero uno scarto totale superiore, 0.2, pur trattandosi  evidentemente di due lingue  assai più simili.

Abbiamo diversi modi di risolvere il problema. Uno è quello di sommare non gli scarti, ma i valori assoluti degli scarti, che sono sempre positivi. Nell’esempio appena fatto, la prima coppia avrebbe uno scarto totale 7, la secondo 0.8, non lasciandoci dubbi su quale coppia di lingue sia più simile.
Un secondo modo è quello di sommare non gli scarti, ma i loro quadrati. Questo è il metodo che useremo ed è anche il più usato in statistica ed in matematica in generale. Anche qui, i quadrati sono sempre positivi.

Questo metodo ha anche una simpatica interpretazione geometrica.  La somma dei quadrati delle differenze sembra dirci che stiamo calcolando una distanza Euclidea tra due punti in uno spazio particolare, con 5 dimensioni date dalle vocali. Nella figura sottostante ho usato solo due vocali, la I e la U. Ad ognuna delle cinque lingue corrisponde   un punto le cui coordinate sono la frequenza di U e la frequenza di I rispettivamente. Il nostro occhio ha un buon apprezzamento della distanza euclidea, e penso ci siano pochi dubbi che sulla base di questo diagramma la lingua misteriosa è più vicina al latino di ogni altra lingua. Fare la somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate non farebbe che confermare questa impressione.

In questa figura il punto rappresentativo della lingua ignota è indicato con ?, l'italiano con It, l'inglese con In, il francese con F, lo spagnolo con S, il latino con L.

E se avessimo scelto altre due vocali? Avremmo ancora una così chiara distinzione? Naturalmente è meglio fare lo stesso gioco con tutte le vocali insieme, ma non abbiamo fogli in cinque dimensioni. Ad ogni modo, scegliendo le vocali A e E, possiamo ancora vedere che la lingua ignota e il latino sono le più vicine.

Ed ora vediamo un programma che ci permette di calcolare la distanza in 5 dimensioni per il nostro caso, sempre che non vogliamo farlo a mano, magari con il sussidio di una calcolatrice elettronica.

***PROGRAMMA NUMERO 10 IN QBASIC: "DISTANZA TRA LINGUE"***

```
CLS
REM DISTANZA TRA LINGUE
DIM  MISTERO(5)
MISTERO(1)=0.0865
MISTERO(2)=0.0577
MISTERO(3)=0.1346
MISTERO(4)=0.0577
MISTERO(5)=0.0961
DIM ITAL(5)
DIM FR(5)
DIM INGL(5)
DIM SP(5)
DIM LAT(5)
ITAL(1)=0.117
ITAL(2)=0.117
ITAL(3)=0.113
ITAL(4)=0.087
ITAL(5)=0.027
```

```
FR(1)=0.080
FR(2)=0.167
FR(3)=0.076
FR(4)=0.058
FR(5)=0.027
INGL(1)=0.080
INGL(2)=0.124
INGL(3)=0.067
INGL(4)=0.076
INGL(5)=0.027
SP(1)=0.111
SP(2)=0.130
SP(3)=0.082
SP(4)=0.097
SP(5)=0.036
LAT(1)=0.072
LAT(2)=0.092
LAT(3)=0.101
LAT(4)=0.044
LAT(5)=0.074
DIT=0.0
DFR = 0.0
DIN=0.0
DSP = 0.0
DLA=0.0
FOR I=1 TO 5
DIT = DIT + (ITAL(I)- MISTERO(I))^2
DFR = DFR+ (FR(I)- MISTERO(I))^2
DIN = DIN + (INGL(I)- MISTERO(I))^2
DSP = DSP + (SP(I)- MISTERO(I))^2
DLA= DLA+ (LAT(I)- MISTERO(I))^2
NEXT I
PRINT  "Distanza Italiano  = ", DIT, SQR(DIT)
PRINT  "Distanza Francese  = ", DFR, SQR(DFR)
PRINT  "Distanza Inglese  = ", DIN, SQR(DIN)
PRINT  "Distanza Spagnolo  = ", DSP, SQR(DSP)
PRINT  "Distanza Latino  = ", DLA, SQR(DLA)
```

Risultati:

| Lingua | Quadrato della distanza | Distanza |
|---|---|---|
| ITALIANO | 0.0105 | 0.1027 |
| FRANCESE | 0.0201 | 0.1421 |
| INGLESE | 0.01412 | 0.1188 |
| SPAGNOLO | 0.1375 | 0.1173 |
| LATINO | 0.0032 | 0.0056 |

Il quadro complessivo è che la distanza è minima per il Latino, che quindi è il miglior candidato come "lingua misteriosa".
Infatti il testo da me scelto erano i primi tre versi della Satira IX, Libro 1 di Orazio, detratti gli spazi ed i segni di interpunzione:
"*Ibam forte via sacra sicut meus est mos*
*Nescio quid meditans nugarum, totus in illis.*

*Accurrit quidam notus mihi nomine tantum…"*

## LIV. IL PIGRECO

Se il vostro cammino, o di professionista o di amatore della matematica, vi spingerà a conoscere sempre più il grande gioco, vi imbatterete sempre più spesso in un numero straordinario, la cui esistenza era nota ai greci anche se non lo conoscevano con precisione. Il numero è noto come Pigreco e vale 3.14159.... e non finisce mai. Ma, a differenza di molti numeri che abbiamo finora incontrato, non è periodico.

Questo lo pone in una classe speciale. Il fatto che non sia periodico già ci dice che non può essere espresso come una frazione, perché tutte le frazioni con denominatore p sono esprimibili con un numero periodico di al massimo $10^{(p-1)}$ cifre. E qui potrebbe dire qualcuno che la sa lunga: è vero che noi conosciamo diversi milioni di cifre di Pigreco e ancora il periodo non si vede. Ma si conoscono numeri primi superiori a 100 000 000 e quindi...
Per esempio il numerino 618 970 019 642 690 137 449 562 111 è primo ( il periodo della divisione 1/p mi è ignoto) ed è noto da almeno cinquant'anni. Giusta osservazione. Dimostrare che $\pi$ non è periodico non è uno scherzo.

Intanto, però, ci possiamo chiedere: come è possibile convincerci che esistono numeri decimali illimitati non periodici?
Questa domanda ha una ingegnosa risposta.
Prima di tutto, noi possiamo mettere in ordine le frazioni in modo che non ce ne scappi nessuna. In che ordine le possiamo mettere? Ora è chiaro che non le possiamo ordinare dalla più piccola alla più grande, perché se voi mi dite una frazione "piccola", per esempio un millesimo, io ve ne dico una più piccola, cioè un decimillesimo e voi me ne dite una più piccola ancora. Il punto non è di metterle in ordine di grandezza, ma di metterle in un ordine da cui non ne scappi nessuna.
Per esempio ordiniamo le frazioni in uno schema in cui la riga ci dà il numeratore e la colonna il denominatore.

E’ chiaro che con questo sistema non ci scappa nessuna frazione, perché tutti i numeratori e tutti i denominatori possibili sono rappresentati.  Anzi, ci sono troppe frazioni: molte non sono altro che dei doppioni e noi elimineremo via via quelle che abbiamo già incontrato

Adesso le mettiamo in ordine. E’ chiaro che se prima di incominciare la seconda riga aspettiamo di finire la prima, che ha infiniti elementi, la seconda  non la incominceremo mai. Però  possiamo avere un ordine sensato seguendo, per esempio, o dei quadrati o delle diagonali, come in figura. Seguendo le diagonali abbiamo:

1/1 ;     2/1,  1/2  ;     3/1   2/2(NO, l’abbiamo già)    1/3;    4/1, 3/2  , 2/3,  1,4;  5/1, 4/2 (NO, l'abbiamo già), 3/3 (NO),  2/4 (NO), 1/5
 Vedete che con questo sistema, dato "un po’  "  di tempo, le scriviamo " tutte".
Adesso le scriviamo in numeri decimali infiniti.

1. 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
2. 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0. 5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
3. 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0. 3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3
4. 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
1. 5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0. 6  6  6  6  6  6  6  6  6  6  6  6
0, 2  5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
5, 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
0, 2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0

Adesso l'idea.
Cambiamo in un modo qualunque la prima cifra decimale nella prima frazione, la seconda nella seconda, la terza nella terza - per esempio mettiamo al posto della cifra il valore della cifra + 1 senza riporti (cioè  9+1=0). Così otteniamo:

1. **1**  0  0  0  0  0  0  0
2. 0  **1**  0  0  0  0  0  0
0. 5  0  **1**  0  0  0  0  0
3. 0  0  0  **1**  0  0  0  0
0. 3  3  3  3  **4**  3  3  3
4. 0  0  0  0  0  **1**  0  0

Ora scriviamo il numero "diagonale"  formato dalle cifre che abbiamo cambiato:
0.1111141….

Per divertirvi potete tentare di mettere insieme un programma QBASIC per scrivere le frazioni fino alla cinquantesima riga.

In realtà il numero che stiamo creando non può essere una delle frazioni che noi stiamo elencando, e poiché nella nostra lista le frazioni ci sono tutte, questo vuol dire che il numero che stiamo creando non è esprimibile con una frazione.

Perché non può essere una delle frazioni che stiamo elencando? Perché differisce sicuramente dalla prima almeno nella prima cifra, dalla seconda nella seconda cifra, dalla terza nella terza cifra eccetera. **E nella nostra tavola le frazioni ci sono tutte.**

Quindi esistono numeri che non si possono rappresentare con frazioni.
Dato che in latino la frazione era detta "ratio", i numeri che non si possono rappresentare con frazioni sono detti irrazionali. Che non vuol dire irragionevoli.

Tra l'altro, i greci conoscevano da tempo un numero che non si può rappresentare con una frazione, ed è la radice quadrata di due.
La dimostrazione, già nota ai greci, che ne furono scioccati, è un bell'esempio di **dimostrazione per assurdo**, cioè facendo vedere che se la radice di due fosse infatti rappresentabile come una frazione otterremmo una contraddizione.
Supponiamo "per assurdo" che la radice di due sia già scritta in forma di frazione, in modo che non ci siano fattori comuni tra denominatore e numeratore, ciò che possiamo sempre ottenere dividendo numeratore e denominatore per il loro MCD . Sia dunque la nostra frazione a/b, senza fattori comuni tra a e b.
Abbiamo allora $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$
Cioè $a^2 = 2\,b^2$

Ma qui sorge un problema:
1) il quadrato di un numero dispari è sempre un numero dispari.
$(2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.
Dispari vuol dire che non è divisibile per due, ma è un numero della forma 2(qualsiasi cosa)+1, il quale diviso 2 dà sempre resto 1. .

2) Invece il quadrato di un numero pari è sempre pari:
$(2n)^2 = 4n^2$,
anzi, è addirittura divisibile per quattro.

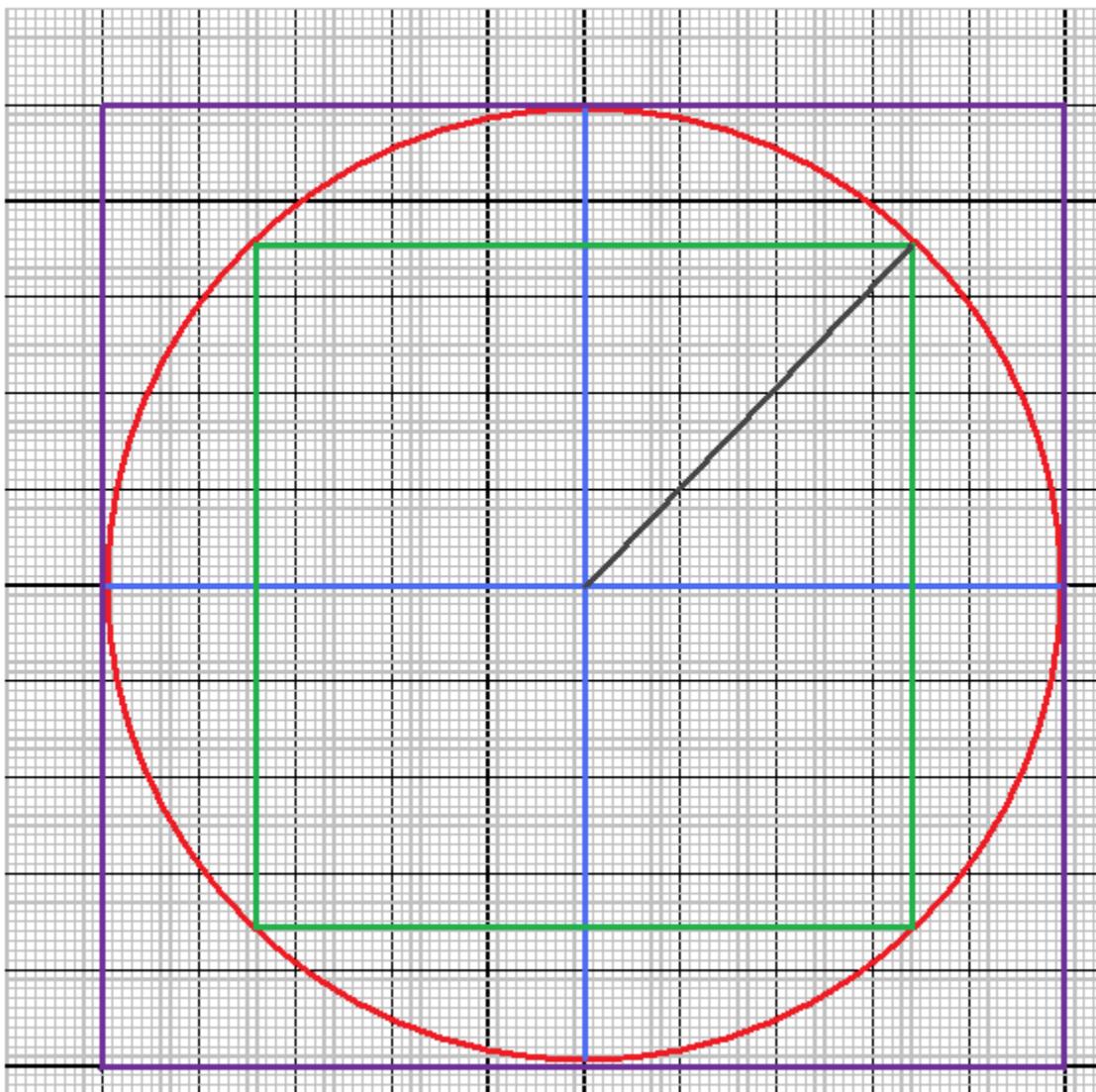
Insomma, o un quadrato non è divisibile per 2 o è anche divisibile per quattro.
Quindi $a^2$, che è evidentemente divisibile per 2, dato che è eguale a $2b^2$, deve essere divisibile per 4. Ma se $2\,b^2$ è divisibile per 4, vuol dire che $b^2$ è divisibile per 2, anzi per 4, visto che è un quadrato.

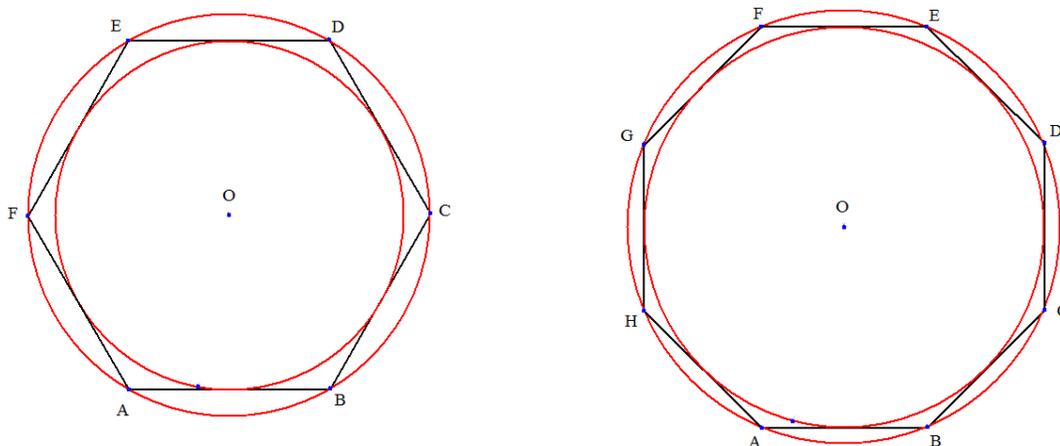
Dunque i nostri a e b, che non dovevano avere fattori comuni, sono entrambi numeri pari e quindi entrambi hanno il fattore comune 2, il che è contro la nostra proposta ("ipotesi") che $2 = (a/b)^2$, con a/b senza fattori comuni, ipotesi che quindi è assurda.

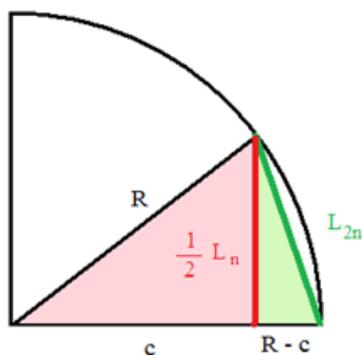
Fortunatamente, nel 1872 un certo Lindemann dimostrò finalmente che Pigreco è un numero

irrazionale, cioè  non è esprimibile con una frazione. Punto.
Quel che è più, dimostrò che pigreco è un numero irrazionale come la radice di 2, ma corre in una categoria superiore, perché la radice di due è la soluzione dell'equazione $x^2=2$, mentre non si possono scrivere equazioni la cui soluzione sia pigreco.  I numeri del primo tipo, come la radice di due, si chiamano numeri irrazionali ***algebrici***; i secondi, come il pigreco, ***trascendenti***.

Ma come si fa a calcolare Pigreco?

**a) Seguaci di Archimede.**
Ricordo ancora quando il mio maestro di quarta elementare ci disse che il numero pigreco non termina mai e che se ne conoscevano allora un migliaio di cifre. Io andai a casa e presi un cordino, lo disposi  intorno ad un vaso rotondo, divisi la lunghezza del cordino per il diametro del vaso, e trovai non 3.14159 ed infinite cifre, ma soltanto 3.
Dunque non è con metodi del genere che si calcola il pigreco.
Ci sono però diversi modi funzionanti. In effetti, calcolare pigreco è un'arte.
Archimede, per quanto ne sappiamo, fu il primo ad indicare un modo chiaro e netto per arrivarci.

Usiamo un bel foglio di carta millimetrata.
Dato un cerchio, si può sempre disegnare un poligono regolare che ha i vertici sul cerchio (poligono inscritto), o un poligono regolare di egual numero di lati tangenti al cerchio (poligono circoscritto). Farlo usando solo il compasso e la riga non è sempre possibile per poligoni di qualsiasi numero di lati, ed il dimostrare quali poligoni possano essere costruiti con riga e compasso fu un bel successo del nostro Principe. Ma con un buon goniometro noi non abbiamo difficoltà.
La somma delle lunghezze dei lati del poligono circoscritto è "evidentemente" più grande della lunghezza della circonferenza, che, a sua volta, è maggiore della somma dei lati del poligono inscritto. “Evidentemente” non va poi tanto bene, perché esistono curve inscritte in un cerchio la cui lunghezza è superiore alla circonferenza. Ma per il quadrato e poligoni regolari possiamo fidarci dei nostri occhi.
Proviamo con un cerchio di raggio 5 e quindi diametro 10. Il quadrato inscritto, verde, ha lati lunghi circa 6.8, ne ha 4, totale: 27.2. Il quadrato circoscritto è lungo 40. Quindi dobbiamo aspettarci che la circonferenza (che, sappiamo bene, è lunga pigreco) sia compresa fra questi due

valori. Proviamo a prendere il valore intermedio: (40+27.2)/2=33.6, con un pigreco che vale 3,36.  Un po' grande.  Ma era il primo tentativo, con un disegno fatto coi piedi.  Noi vediamo abbastanza bene che aumentando il numero di lati, otteniamo un poligono circoscritto ed uno inscritto che approssimano sempre meglio il cerchio.

Archimede usò una formula che, dato il lato di un poligono inscritto, permette di calcolare (usando il teorema di Pitagora e nulla più) la lunghezza del lato dei due poligoni, inscritto e circoscritto,  con un numero doppio di lati.

Non voglio imporre la formula di Archimede e dei suoi successori, ma, come dicevo, si tratta unicamente di  due applicazioni del teorema di Pitagora:
1) nel triangolo rosa vale la relazione  c = $\sqrt{(R^2 - \ L_n{}^2/4)}$,  dove $L_n$ è il lato del poligono con n lati;
2) nel triangolo verde vale la formula $L_{2n}$ = $\sqrt{((R-c)^2 + L_n{}^2/4)}$, dove $L_{2n}$ è il lato cercato del poligono di 2n lati..
Sostituendo *c* e riordinando, si trova:

$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{{L_n}^2}{4}}}$$

Che si può mettere in forma più compatta, ma a noi non serve.
Piuttosto notiamo che, se n =4, per cui sappiamo che $L_4$= R√2, sostituendo otteniamo che il lato dell'ottagono è

$$L_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

Se poi si vuole $L_{16}$ si deve inserire questa formula in quella precedente. Procedendo si dovrebbe trovare che raddoppiando continuamente il numero di lati, la formula per numeri di lati del genere di 4, 8, 16, 32 etc. può essere scritta senza doverla calcolare ogni volta, grazie ad una sua bella simmetria.
E' però più semplice partire col lato $L_4$= √2, introdurre questo valore nella formula per $L_{2n}$, cioè $L_8$, trovare il perimetro moltiplicando per 8, introdurre $L_8$ nella nostra formula come nuovo $L_n$ trovare $L_{16}$ e procedere. Basta servirsi di una calcolatrice che faccia le radici quadrate e organizzare bene i calcoli.
Qui il lettore attento dirà: "E il poligono circoscritto?". D'accordo, anche per i poligoni circoscritti esistono formule che non richiedono altro che radici quadrate, ma sappiamo che i valori dei due perimetri tendono comunque al valore della circonferenza. Semplicemente, il nostro sarà approssimato per difetto e ci darà un pigreco un po' più piccolo di quello vero.

Un programma Basic in nove istruzioni, di cui le prime due superflue, può eseguire questo calcolo senza problemi. Scegliendo raggio R=1 dovremmo arrivare ad un perimetro sempre più vicino a 2π per valori sempre maggiori del numero dei lati.

***PROGRAMMA NUMERO 11 IN QBASIC: CALCOLO DI PIGRECO COL METODO DI ARCHIMEDE***

```
CLS
REM Calcolo di pigreco seguendo  Archimede
INPUT "Quanti passi? ", N
L = SQR(2)
FOR I = 2 TO N
L = SQR(2 - 2 * SQR(1 - L#^2/4))
PI = 2^I * L
PRINT I, 2*2^I, L, PI
NEXT I
```

I risultati sono ottimi: presto siamo al limite della precisione di QBasic, e troviamo una buona approssimazione di pigreco, il quale vale 3,141592653589… Dalla tavola qui sotto si vede che abbiamo sei cifre decimali corrette. Non si può spingere QBasic troppo lontano. Ad un certo punto la precisione incomincia a fare difetto e i valori di pigreco scendono invece di salire. Usando doppia precisione (cioè con L# e PI# invece di L e PI) il punto più vicino a pigreco lo troviamo per 131072 lati, e vale 3.141592653325, con 9 cifre decimali corrette, poi i guai incominciano. Sotto certi aspetti, questa nove cifre sono molte, ma già nel 1600 Ludolph van Ceulen aveva calcolato pigreco con trentacinque cifre decimali.

Senza andare in doppia precisione troviamo:

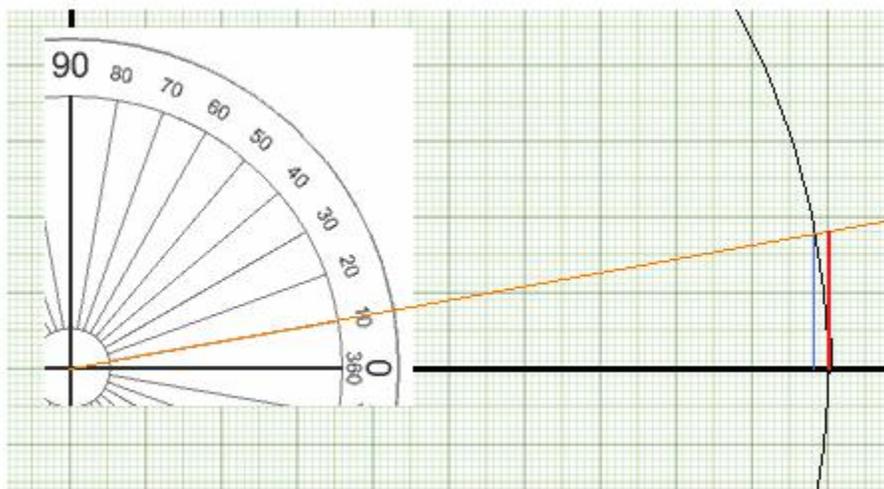
| Numero lati | Lato | Perimetro/2 Approssimazione a π |
|---|---|---|
| 8 | 0.7653669 | 3.061467 |
| 16 | 0.3901806 | 3.121445 |
| 32 | 0.1960343 | 3.136549 |
| 64 | 0.09813535 | 3.140331 |
| 128 | 0.04908246 | 3.141277 |
| 256 | 0.02454308 | 3.141514 |
| 512 | 0.01227177 | 3.141573 |
| 1024 | 0.06135914 | 3.141588 |
| 2048 | 0.0306796 | 3.141592 |

**b) Metodo grafico approssimato.**

Però, se non siete in grado di derivare la formula che ho dato, è più onesto usare invece un metodo grafico, molto meno preciso.
Prendete un foglio di carta millimetrata e tracciate una linea di 10 centimetri. Questo vi permetterà un paio di cifre sicure nei vostri conti. Poi tracciate con un compasso una parte del cerchio di raggio 10 cm e tracciate con un goniometro le rette che formano angoli che voi deciderete.
Notate che non avete bisogno di disegnare i poligoni interi, basta disegnare un lato, e questo lo si può fare facilmente se conosciamo l'angolo al centro ed abbiamo un goniometro. L'angolo al centro, naturalmente, è 360 diviso il numero di lati. .

Dato che noi non useremo la formula di Archimede possiamo usare un poligono di 18 lati. Ciò vuol dire che l'angolo da cui il centro vede ogni lato è 20 gradi (= 360/18). A noi ne basta mezzo. Data la retta a 10 gradi, tracciamo due segmenti di retta, uno, perpendicolare, dal cerchio alla nostra retta di base (blu), e l'altro, perpendicolare dal punto ove il cerchio tocca la retta di base alla retta a dieci gradi (rosso). Il primo segmento, AB, è metà del lato del poligono inscritto di 18 lati, l'altro è metà del lato del poligono circoscritto di 18 lati.

Se facciamo il disegno, otteniamo che il perimetro del poligono inscritto è 36 volte il mezzo lato blu, e vale 17.5 x 36 = 630 mentre il perimetro del poligono circoscritto è 18 x 36 =648. La

media è 639, con un pigreco = 3,195.

La formula "converge", ma non troppo rapidamente, al valore 3.14159.
Potete fare disegni più accurati, per esempio con un cerchio di raggio 20 cm e tentare con un poligono di 36 lati.

Se proprio siete megalomani potete notare che metà del lato del poligono circoscritto è dato dalla tanA, dove A è metà dell'angolo sotteso da un lato, mentre metà del lato del poligono inscritto è data da sinA. Andiamo a cercare (tavole, Google, Basic) i lati del poligono di 180 lati, angolo due gradi. Ci occorre la tan(1°) e il sin(1°). Tan(1°) = 0.017455, mentre sin (1°)= 0.017452 Intanto vediamo che sulla carta millimetrata non avremmo mai potuto vedere la differenza tra tanA e sinA, che differiscono solo alla sesta cifra decimale. In effetti, come abbiamo sempre detto, questa differenza tende a zero quanto più piccoli sono gli angoli. D'altra parte proprio questo fatto, che la lunghezza del perimetro del poligono circoscritto tende ad essere eguale a quella del perimetro del poligono circoscritto (ed entrambe le lunghezze tendono a quella della circonferenza) è la precisa ragione per cui cerchiamo di calcolare pigreco in questo modo.
Il perimetro del poligono di 180 lati inscritto è 360 volte sinA e vale 6.28286. Il poligono del poligono di 180 lati circoscritto vale 6.2832. La media divisa per due ci dà un bel pigreco: 3.14167.

**c) Metodo numerico**

Nel 1600 un altro Inglese, Gregory, trovò in base ad un ragionamento più complesso, che la seguente serie infinita permette di calcolare pigreco:

pigreco = 4 (1 -1/3+1/5-1/7+1/9 eccetera. Ma bisogna andare fino all'infinito.

Vediamo come funziona. La prima approssimazione è :
pigreco =4 (un po' grande)
la seconda è

pigreco= 4(1-1/3) = 8/3= 2,67, un po'  piccolo. Pigreco deve stare fra le due approssimazioni: facciamo la media e otteniamo 3.33.

Terza approssimazione:
pigreco = 4(1-1/3+1/5)= 4((15-5+3)/15)= 52/15 = 3.47 (grande)
Quarta approssimazione:
pigreco= 4(1-1/3+1/5-1/7)= 4 (105-35+21-15)/105=2.89
media: 3.18
Anche qui, soprattutto usando il trucco della media, a poco a poco ci si arriva.

Programma QBASIC per sommare la serie di Gregory.

***PROGRAMMA NUMERO 12 IN QBASIC: CALCOLO DI PIGRECO COLLA SERIE DI GREGORY***

```
CLS
PRINT "Calcolo di pigreco per mezzo della serie di Gregory"
INPUT "Quanti passi? ", PASSI
PIGRECO# = 1
FOR N = 1 TO PASSI
PIGRECO#  =  PIGRECO#  -  (2/(16*N^2-1))
PRINT  PIGRECO#*4
NEXT N
```

Il programma dà la possibilità di decidere quanti passi fare. Il procedimento è nella sua forma più semplice, in cui al valore 1 di partenza sottraggo due termini per volta, cioè

$$\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} = \frac{2}{4n^2-1}$$

Faccio questo per tener conto del fatto che i termini 1/(4n-1) hanno segno negativo e i termini 1/(4n+1)  - più piccoli -  hanno segno positivo.
Nel programma il cancelletto (#) sta ad indicare "doppia precisione", cioè che desidero 20 cifre decimali, altrimenti dopo pochi passi il calcolo aggiunge solo degli zeri ed il risultato si blocca assai lontano dalla meta.
Facendo 1 000 000 di passi (e quindi sottraendo la differenza di  due termini per volta, due milioni di termini in tutto), ottengo 3.1415931536, mentre il vero pigreco incomincia con 3.1415926.  Insomma, cinque cifre corrette le abbiamo.

Se vi sentite in vena, provate a usare il metodo indicato più  sopra, di fare la media tra i risultati dopo n e dopo n+1 passi. Dovreste arrivare più in fretta a valori più corretti di pigreco.

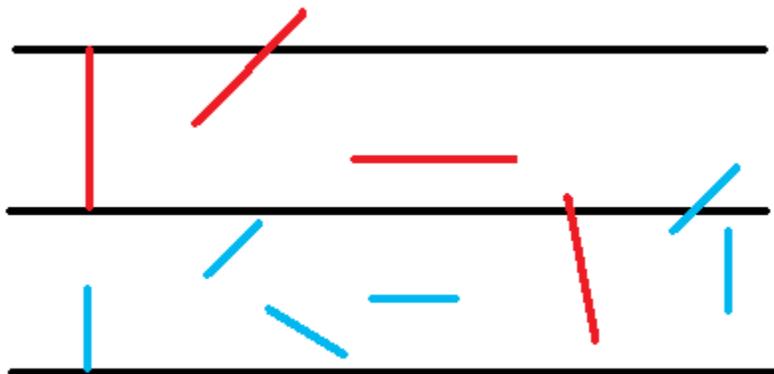
In conclusione abbiamo due grandi classi di metodi, oltre a quello grafico, che non permette di andare molto lontano:
1) Quelli basati sul ragionamento geometrico, il cui padre è Archimede,
2) Quelli basati su formule algebriche, in cui i cerchi non si vedono mai, il cui padre è Gregory.

C’è ancora almeno un terzo gruppo di metodi, assai più curioso.

**d) metodi probabilistici.**

**I. L’ago di Buffon.**
Supponiamo di lanciare a caso degli oggetti unidimensionali su un piano su cui siano tracciate delle linee equispaziate, per esempio con spaziatura L. Nel Settecento, quando era di gran moda studiare calcolo differenziale ed integrale, il naturalista Georges Buffon propose il problema di calcolare la probabilità che, facendo cadere a caso un ago di lunghezza L sul piano rigato di cui sopra, l’ago attraversi una riga. Più tardi ripropose il problema e pubblicò la sua soluzione, da cui risulta un legame inatteso con pigreco.

La soluzione era basata sul “calcolo integrale”, che in questo libro non affrontiamo. Si può tuttavia dare un’altra spiegazione altrettanto logica e più semplice.

Anzitutto facciamo delle simulazioni.
In ogni simulazione, naturalmente, gli aghi devono avere la stessa lunghezza. Notiamo però che se gli aghi sono corti gli attraversamenti sono pochi. Se sono lunghi, gli attraversamenti sono più frequenti.

La simulazione la possiamo fare in tre modi:
1) facendo cadere appositi stecchini su un foglio rigato;
2) simulandola via computer
3) credendo a qualcuno che l’ha fatta, per esempio a me.

La simulazione col computer è abbastanza semplice:
Qui propongo un rudimentale programma QBasic

***PROGRAMMA NUMERO 13 IN QBASIC: CALCOLO DI PIGRECO CON L’AGO DI BUFFON***

```
CLS
REM CALCOLO DI PIGRECO CON L’AGO DI BUFFON
CONST PI = 3.141592
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
```

```
TOTAL = 0
INPUT "Lunghezza?", L
INPUT "Numero passi? ", PASSI
FOR I=1 TO PASSI
TH = 361 * RND
THRAD = TH*PI/180
H=(L/2)*SIN(THRAD)
CENTRO = RND
ES = CENTRO +H
EI = CENTRO -H
IF ES>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF CROSS = 0 THEN GOTO 10
TOTAL = TOTAL +1
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL,CROSS,RAPP
10 NEXT I
```

Il programma anzitutto inserisce la costante $PI = \pi$, poi incomincia la simulazione, che si basa sull'istruzione RANDOMIZE TIMER (che significa di basarsi sul tempo dell'orologio del computer per iniziare la sequenza di numeri a caso, che sono solo, bisogna ricordarlo "pseudo-a caso"). Senza il "RANDOMIZE", i nostri numeri a caso sarebbero sempre gli stessi. Poi abbiamo il solito ciclo "FOR … NEXT" in cui cerchiamo di stabilire se il nostro ago lanciato a caso attraversi o no una riga. Il primo RND sceglie un angolo TH a caso tra 0 e 360 gradi, che poi viene trasformato in THRAD, cioè misurato in radianti moltiplicandolo per $\frac{\pi}{180}$; il secondo RND sceglie una posizione a caso per il centro dell'ago. I quattro IF (in verde) aumentano di uno il numero degli attraversamenti (CROSS) ogni volta che l'ago attraversa o la linea inferiore ( 0) o la linea superiore (1). Il prossimo IF (giallo) evita che nelle prime fasi sia chiesto al calcolatore di dividere per zero.

Dato che il programma permette di variare la lunghezza, facciamo diversi esercizi, tutti con 10000 lanci:

| Lunghezza | Attraversamenti/totale |
|---|---|
| 0.125 | 0.0781 |
| 0.25 | 0.15881 |
| 0.5 | 0.3189 |
| 1.0 | 0.62880 |
| 2.0 | 1.27420 |
| 3.141592 | 1.5795 |
| 6.2831 | 1.7853 |

Vediamo che il rapporto attraversamenti/totale è proporzionale alla lunghezza dello stecchino. Non è strano: gettare stecchini lunghi il doppio è come gettare due stecchini per volta (questa simulazione non l'ho fatta, ma il risultato è ovvio). Però non è del tutto intuitivo, perché uno potrebbe immaginare che due stecchini attaccati insieme non abbiamo la stessa libertà di due stecchini liberi. Ma le simulazioni ci dicono il contrario.

Ho mantenuto questa tavola, che da 2 in avanti è sbagliata, per suggerire un ragionamento. Come mai la frequenza degli attraversamenti raddoppia fino a 2 e poi cresce più lentamente? E' un fatto di natura o è un errore di calcolo? La risposta è che si tratta di un errore di calcolo, che sta nel blocco verde. Erroneamente non abbiamo tenuto conto del fatto che quando lo stecco è più lungo di 2, ci possono essere due attraversamenti per lo stesso stecco. Quindi dobbiamo aggiungere alcune istruzioni che tengano conto di questo fatto:

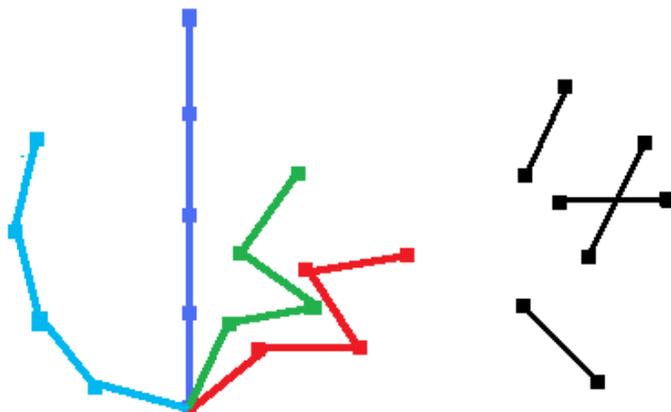
***PROGRAMMA NUMERO 14 IN QBASIC: AGO DI BUFFON - CORRETTO***

```
CLS
REM CALCOLO DI PIGRECO CON L'ANGOLO DI BUFFON - CORRETTO
CONST PI = 3.141592
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
TOTAL = 0
INPUT "Lunghezza?", L
INPUT "Numero passi? ", PASSI
FOR I=1 TO PASSI
TH = 361 * RND
THRAD = TH*PI/180
H=(L/2)*SIN(THRAD)
CENTRO = RND
ES = CENTRO +H
EI = CENTRO -H
IF ES>=3 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES>=2 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-2 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES<=-3 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=3 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=2 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI>=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-1 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-2 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI<=-3 THEN CROSS =CROSS +1
IF CROSS = 0 THEN GOTO 10
TOTAL = TOTAL +1
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL,CROSS,RAPP
10 NEXT I
```

Nuova tabella:

| Lunghezza | Attraversamenti/totale |
|---|---|
| 0.125 | 0.0781 |
| 0.25 | 0.15881 |
| 0.5 | 0.3189 |
| 1.0 | 0.62880 |
| 2.0 | 1.27420 |
| 3.0 | 1.9208 |

| 3.141592 | 2.0101 |
|---|---|

Adesso i conti tornano. Ma si può fare un passo in più. Ci si può convincere del fatto che il numero di attraversamenti diviso il numero totale di lanci è proporzionale alla lunghezza L dell'oggetto filiforme L – **comunque questo sia disposto, arrotolato, piegato**.
Se si è accettato che uno stecco diritto lungo il doppio valga come due stecchi di lunghezza metà comunque disposti non dovrebbe esserci problema ad accettare anche questa affermazione.

Che a lanciare quattro segmenti per volta il numero di attraversamenti venga moltiplicato per quattro non ci piove. Ma il segmento quadruplo e le altre spezzate? Va bene, a prima vista ci sembra che la spezzata rossa abbia maggiore probabilità di cadere nello spazio tra due righe, senza toccarne nessuna. Tuttavia, se tocca una riga , è probabile che la tagli in più di un punto. E in entrambi i casi, l'esperimento ci dice che lanciare l'intero oggetto blu-scuro è come lanciare in un sol colpo quattro degli elementi neri. Questo suggerisce che lo stesso valga per altre configurazioni degli stessi elementi. Addirittura notate che l'oggetto rosso può "scodinzolare" durante il lancio e diventare l'oggetto verde, e ancora il numero di attraversamenti diviso il numero di lanci sarebbe in media lo stesso. Questo perché quello che ci importa è il numero di segmenti, non la loro disposizione. E quindi vale anche la disposizione "azzurra" che, vediamo, incomincia a disegnare una figura geometrica nota.
Lo stecchino iniziale di lunghezza L può essere pensato come costituito da stecchini brevissimi ("infinitesimi" avrebbero detto nel '700), e ciò che conta è solo la lunghezza totale.

Calcolare gli attraversamenti di una spezzata cadendo non è banale e complicherebbe il nostro programma di simulazione oltre misura. Se però scegliamo un cerchio di lunghezza (cioè raggio) variabile, il conto diventa facile.

Il programma di simulazione diventa:
***PROGRAMMA NUMERO 15 IN QBASIC: CERCHI DI BUFFON***

```
CLS
REM CERCHI DI BUFFON
CONST PI = 3.141592
```

```
RANDOMIZE TIMER
CROSS = 0
TOTAL = 0
INPUT "Raggio?". R
INPUT "Numero passi? ", PASSI
CENTRO = RND
ES = CENTRO +R
EI = CENTRO -R
IF ES=1 THEN CROSS =CROSS +1
IF ES > 1 THEN CROSS = CROSS +2
IF EI=0 THEN CROSS =CROSS +1
IF EI < 0 THEN CROSS = CROSS +2

TOTAL = TOTAL +1
RAPP = CROSS/TOTAL
PRINT TOTAL, CROSS, RAPP
10 NEXT I
```

Aggiungiamo una colonna alla tabella:

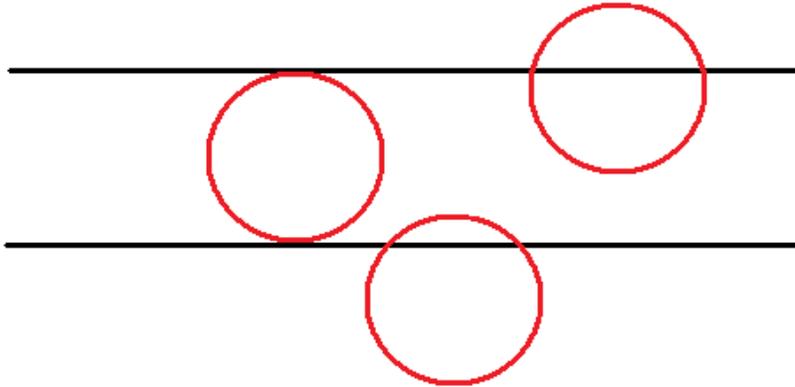
| Lunghezza | Attraversamenti/totale (per un segmento di retta) | Attraversamenti/totale (per una circonferenza) |
|---|---|---|
| 0.25 | 0.15881 | 0.1603 |
| 0.5 | 0.3189 | 0.3379 |
| 1.0 | 0.62880 | 0.63626 |
| 2.0 | 1.27420 | 1.2822 |
| 3.0 | 1.9208 | 1.9184 |
| 3.141592 | 2.0101 | 2.00 |

Notate che i cerchi piccoli o non attraversano alcuna riga, o sono tangenti (e ciò conta per un attraversamento) o l'attraversano due volte. La media, però, entro gli errori statistici, è eguale a quella dello stecco diritto lungo quanto la circonferenza.
In altre parole possiamo veramente credere che, dato un oggetto unidimensionale di lunghezza L, abbiamo:

$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = KL$$

E dobbiamo trovare la costante di proporzionalità K.
Ma vediamo bene che se lanciamo anelli rigidi di raggio ½ e circonferenza $\pi$, non è neppure necessario procedere a simulazioni. Noi scriviamo:

$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = K\,\pi = 2$$

Infatti, come dimostra la figura, ogni cerchio rigido che cada su carta su cui siano tracciate righe equidistanti, col diametro come interspazio, incontra sempre la rigatura in due punti, o perché tocca una volta ciascuna due righe consecutive, o perché taglia due volte la stessa riga. Quindi il rapporto attraversamenti/ lanci vale 2.

Incidentalmente, vale la pena notare che la nostra tabella, per uno stecchino lungo 3.14 dava 2.01 come numero di attraversamenti per lancio. Questo conferma la nostra ipotesi che il numero di attraversamenti dipende solo dalla lunghezza della linea, di qualunque forma essa sia. Inoltre ci dice che il risultato di 10000 lanci ci lascia incerti già sul valore della seconda cifra decimale.

Abbiamo quindi che $2 = K\pi$, ovvero $K = 2/\pi$

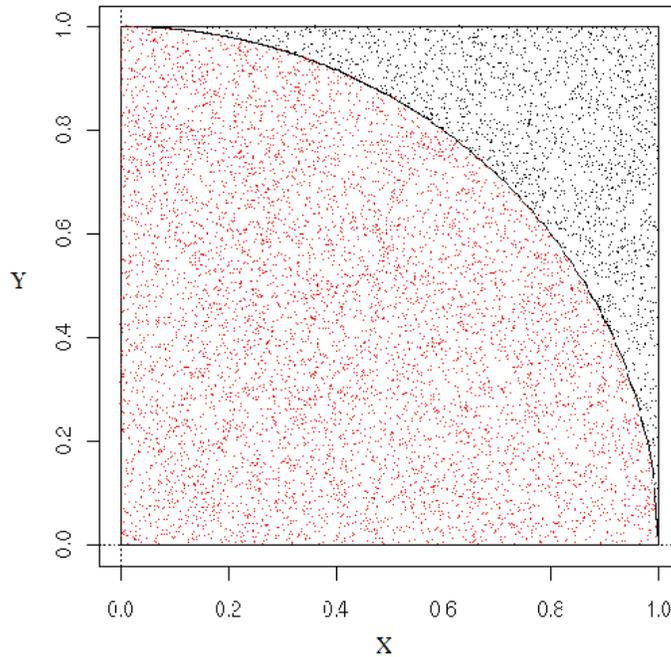
Per stecchini di lunghezza 1 (cioè lunghi quanto l'interspazio) abbiamo che

$$\frac{Attraversamenti}{totale\ lanci} = \frac{2}{\pi}$$

Ovvero:

$$2\ \frac{lanci}{attraversamenti} = \pi$$

Su Internet troverete diversi siti che offrono delle simulazioni con cui potete verificare la giustezza del metodo di Buffon.
Con 100 passi sono arrivato a pigreco = 2.98, con 1000 passi a 3.121875, con 10000 a 3.1301, con 100000 a 3.1608, con 1000000 a 3.15199. Non entusiasmante, ma curioso.

**II. Metodo Montecarlo**
Potremmo pensare ad un altro metodo probabilistico altrettanto impreciso, ma secondo me più facile da capire. Si chiama, con termine generico, "Metodo Montecarlo". E' come se una persona non molto precisa lanciasse freccette su un bersaglio quadrato di lato 1. Se il punto d'impatto è a caso, dopo un certo numero di tentativi il numero di freccette che sono cadute nel cerchio di raggio 1 è proporzionale all'area del cerchio, che è π. Quindi, per semplicità ci limitiamo ad un quarto di cerchio. Ad ogni impatto, per il quale noi identifichiamo le due coordinate X e Y con due numeri casuali tra 0 e 1, noi calcoliamo la distanza dall'origine, che è $\sqrt{(X^2+Y^2)}$ e guardiamo se è maggiore o minore di 1. Alla fine il rapporto tra il numero di impatti nel quarto di cerchio e il numero totale di impatti deve tendere al rapporto tra l'area del quarto di cerchio e l'area del quadrato, cioè π/4.

***PROGRAMMA QBASIC NUMERO 16 - METODO MONTECARLO PER π***

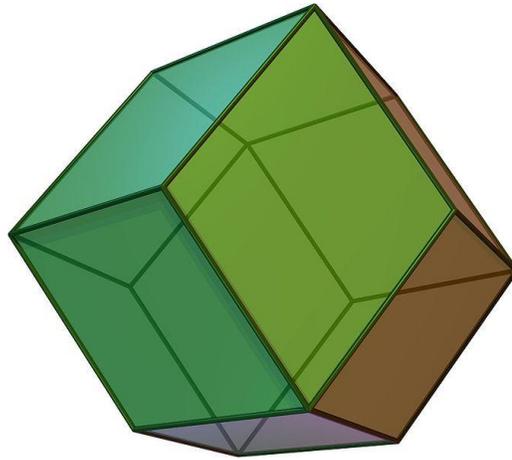
```
CLS
REM "PROGRAMMA PER CALCOLARE IN MODO PROBABILISTICO (MONTECARLO) PIGRECO".
RANDOMIZE TIMER
10 INPUT "Numero di tentativi? ", N
CER = 0
FOR I = 1 TO N
X = RND
Y=RND
D = SQR(X^2+Y^2)
IF D<=1 THEN CER =CER +1
NEXT I
PRINT N, 4*CER/N
GOTO 10
```

L'ultima istruzione permette di ripetere la simulazione quanto si vuole. Quando se ne ha abbastanza, si premano insieme "Ctrl" e "C".

Risultati:

| Numero Tentativi | risultato |
|---|---|
| 100 | 3.16 |
| 1000 | 3.224 |
| 10000 | 3.1088 |
| 100000 | 3.14284 |
| 1000000 | 3.139525 |
| 10000000 | 3.141508 |

**LV. CHE C'ENTRA PLATONE?**

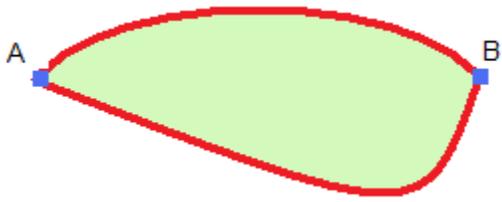
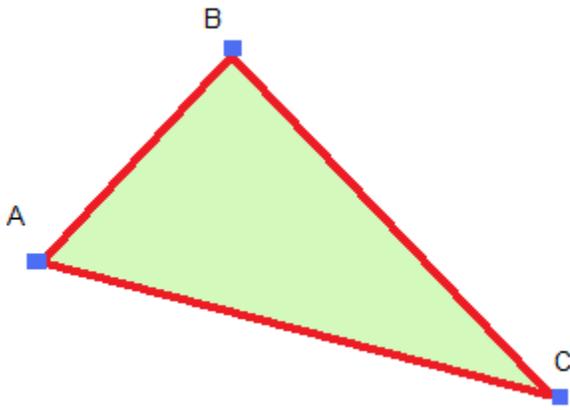
Un poliedro è un solido con facce, spigoli, vertici.

Questo, per esempio, è un poliedro irregolare, che ha spigoli e facce eguali, ma le facce non sono poligoni regolari e non tutti gli angoli sono eguali. Si chiama " rombododecaedro" e questa figura è tratta da Wikipedia,
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Rhombicdodecahedron.jpg

Adesso troveremo una relazione che lega Facce, Spigoli e Vertici, ma vale in realtà per qualsiasi disegno facciamo su una sfera usando solo linee e punti in cui le linee si incontrano, e facce delimitate da queste linee.

Notate che anche sul piano c'è una legge a cui non si può scappare.

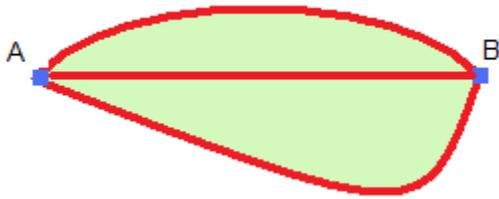
Supponiamo che esista una relazione con dei numeri ignoti che vogliamo trovare.
La relazione sia
a × (Facce) + b ×(Vertici) + c × (Lati) + d =0.
Scriviamo usando meno inchiostro:
aF+bV+cL+d=0

Noi vogliamo trovare a,b,c,d.

Ora, questo vuol dire che sappiamo, o crediamo di sapere, già molto. Se la relazione è di questa forma, è facile trovarla. Se non è di questa forma, ma c'entra per esempio il quadrato del numero delle facce o il cubo del numero dei lati, la relazione non la si trova col metodo che indicherò. Potremmo però accettare un altro approccio: la relazione che ho indicato è la più semplice immaginabile che coinvolge facce, vertici e lati. Se troviamo una formula semplice che funziona, ce la teniamo. Se non la troviamo, cercheremo qualcosa di più complicato. Fortunatamente, una forma semplice (che si può verificare come corretta) la si trova.

Incominciamo con una figura formata da 2 archi che si congiungono in due punti:
Questi ci danno 1 faccia (verde), 2 vertici (blu), 2 lati (rossi), cioè
1a+ 2b+2c+d=0

Ora proviamo con un triangolo:
1 faccia, 3 vertici, 3 lati
a+3b+3c+d=0

Sottraiamo le due relazioni (i membri di sinistra sono entrambi eguali a zero, quindi la loro differenza sarà ancora zero).

$$\begin{array}{r} a + 3b + 3c = 0 \\ \underline{a + 2b + 2c = 0} \\ b + c = 0 \end{array}$$

otteniamo: b+c= 0
Se i due membri sono eguali, lo resteranno sottraendo c ad entrambi): b+c - c= - c, cioè b= - c ovvero c= - b.
Sostituendo a *c* il valore –*b* che abbiamo trovato, la nostra relazione vale ora *aF+bV-***b***L+d=0*

Adesso alla prima figura aggiungiamo un braccio interno:
2 Facce, 2 vertici, 3 lati.
2a+2b-3b+d=0
Sottraiamo da questa la relazione che vale per la prima figura: a+2b-2b+d=0

2a+2b-3b+d=0
a+ 2b -2b+d=0
a -b =0

Troviamo: a-b=0, cioè (aggiungendo b ad entrambi i membri) a=b.

Ora la relazione é
a(F+V-L)+d=0
Per la prima figura vale a(1+2-2)+d=0
Cioè a+d=0
cioè a= - d.
Quindi la relazione è a(F+V-L-1)=0.
Basta che a non sia zero, e ce lo possiamo togliere dai piedi, restando con:

**F+V=L+1**

Ora provate con qualsiasi figura disegnata sul piano, anche complicatissima, e troverete che la relazione è sempre valida.

La prossima domanda è se esiste una relazione simile anche per le superficie in tre dimensioni, cioè i poliedri. In altre parole, se esiste una simile soluzione per il problema di partenza.
É chiaro che se deformiamo il poliedro, per esempio lo gonfiamo in una sfera eccetera, la relazione tra i numeri di lati, i punti di incrocio (vertici) e le superficie delimitate dai lati rimane la stessa. Cambieranno magari le lunghezze dei lati o le aree o le forme delle facce, ma non i loro numeri. Cinque facce saranno sempre cinque facce, 8 vertici 8 vertici e 11 lati undici lati.
Supponiamo ora di avere un poliedro disegnato su un foglio di gomma. Spiaccichiamolo sul tavolo in modo da lasciare una sola faccia di sotto. Abbiamo cioè un disegno sul piano, che però ha anche una faccia di sotto. Se dobbiamo aggiungere una faccia (che sul piano non si vede) mentre tutto il resto rimane com'è, dobbiamo aggiungere 1 anche a destra. Cioè

**F+V=L+2.**

Le cose si complicherebbero se vivessimo in uno spazio con uno o più buchi. Ma non ci occupiamo di queste complicazioni, anche se molti matematici le trovano interessanti.

Dunque nello spazio ci troviamo con la relazione F+V=L+2. Il numerino alla fine della formula, 1 per il piano, 2 per lo spazio, si chiama "caratteristica di Eulero".
Bisogna abituarsi a questo nome: Eulero (di Basilea) è uno dei grandi matematici della storia, uno che aveva due o tre marce in più, insieme ad Archimede (di Siracusa), Lagrange (torinese), Gauss, Riemann e pochi altri.

Ma vedete che strano: la caratteristica di Eulero ci dice in che spazio ci muoviamo, piano a 2 dimensioni, o spazio a 3 dimensioni. Spazi con un numero maggiore di dimensioni, immaginati da matematici e fisici - e pochi altri, possono avere un altro valore per la caratteristica.

La relazione che abbiamo appresa, che vale per tutti i **poliedri**, è anche quella che ci dice che ci sono solo cinque poliedri **regolari** (tutte facce eguali e tutti poligoni regolari: quindi triangoli equilateri, quadrati, pentagoni, esagoni, eptagoni, ottagoni eccetera). Già vediamo che qualcosa di importante sta succedendo. Ci sono infiniti poligoni regolari, ma di poliedri regolari ne troveremo solo cinque.
Dunque, perché solo cinque, e chi sono questi sconosciuti?

Intanto sappiamo che F+V=S+2 (scrivo S per spigoli)

**Supponiamo che le facce siano quadrati.**
I vertici sono quattro per faccia (V=4F), ma non sappiamo quante facce partners si condividono un vertice. Chiamiamo p questo numero di facce partners che si incontrano ad ogni vertice.
Gli spigoli sono 4 per faccia (quadrati!), e quindi S=4F, ma ognuno vale per due facce (cioè S= 4F/2).

$$F + 4F/p = 4F/2 + 2$$
$$F(1 + 4/p - 2) = 2$$
$$F(4/p - 1) = 2$$

Vediamo ora quanti valori di p sono ammissibili.
Intanto il numero di facce partners che si dividono un vertice deve essere un numero intero e positivo. Però, se p, numero di facce che si incontrano in un vertice, è maggiore di 4, vediamo subito che il numero di facce diviene negativo. Troppo poche!
Se p è eguale a 4 troviamo una divisione per zero, non accettabile. Dunque p vale solo 1,2,3.
Se vale 1, F =2/3 - ma le facce devono essere un numero intero
Se vale 2, F= 2, troppo poche. Si può immaginare un poliedro piatto come una sogliola con due poligoni regolari, in questo caso due quadrati, come facce, una sotto e una sopra, ma il volume contenuto è 0, e non lo prendiamo in considerazione.
**Quindi l'unica possibilità è p=3 (tre facce si incontrano ad ogni vertice), da cui F=6.**
**Questo unico poliedro regolare con facce quadrate è il cubo, che ha appunto sei facce.**

Proviamo con triangoli

$$F + 3F/p = 3F/2 + 2$$
$$F(1+3/p-3/2)=2$$
$$F(3/p-1/2)=2$$

Adesso vediamo cosa succede variando p.
p =2 -> F = 4/5, non è un numero intero.
p=2 -> F= 2  troppo poche.
p=3 -> F= 4  Sì, questo è il **tetraedro**, che significa appunto "quattro facce".
p=4 -> F= 8  Sì (questo è l'**ottaedro**, che significa appunto.....)
p=5 -> F= 20  Sì  (questo è l'**icosaedro**, che significa "venti facce")
p=6 -> F= 2/0 non si può. E tutte le altre p danno un numero di facce negativo.

Proviamo con pentagoni

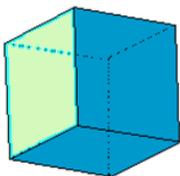
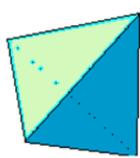
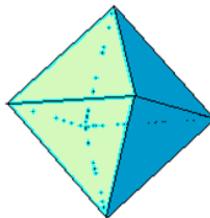
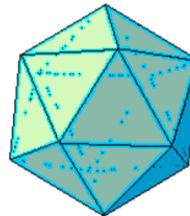
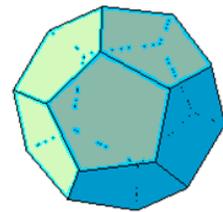
$$F(1+5/p-5/2)=2$$
$$F(5/p-3/2)=2$$

Se p=1, abbiamo F= 4/7, meno di una faccia
p=2   F= 2, troppo poco
p=3   F= 12  Sì, questo è il **dodecaedro**
p=4   le F incominciano a diventare negative, e non ci sono altri poliedri con facce pentagonali.

E poi, se provate con esagoni eccetera, vedete che non c’è più modo di formare poliedri

Esagoni:  si ottiene F(6/p-2)=2.
p=1  F=1/2, meno di una faccia
p=2  F= 2 , due sole facce
p=3  F= 2/0 non si può, e tutte le altre F sono negative.

Il campo di possibilità si restringe aumentando il numero di lati.  Anzi, si è già ristretto in modo da rendere impossibili poliedri regolari con facce a forma di esagoni regolari.

Dunque abbiamo trovato i soli cinque poliedri regolari, così famosi da avere un nome importante: sono i cinque solidi "platonici".

Avrete notato che di questo gruppo di cinque non fa parte il rombododecaedro con cui abbiamo incominciato questa storia. Perché non c’è?

**LVI. L'ESAEDRO CI INSEGNA.**

Mi ricordo che quando ero ragazzino di dodici anni, ebbi una lunga discussione con amico studente di ingegneria che mi diceva che due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito. Io non ci potevo credere. Per me la parallela ad una retta è tale perché proprio non l'incontra mai, come le rotaie di un binario ferroviario. Andai a casa molto contrariato. Mio nonno, che se ne intendeva, mi disse: dire che due rette parallele si incontrano in un punto all'infinito è come dire che non si incontrano mai. Piuttosto, il bello è accettare che se tu cammini in una direzione del tuo binario fino all'infinito e trovi il punto in cui si incontrano, questo è lo stesso punto in cui si incontrano seguendole nella direzione opposta. Dunque c'è solo un punto di incontro all'infinito, non due.

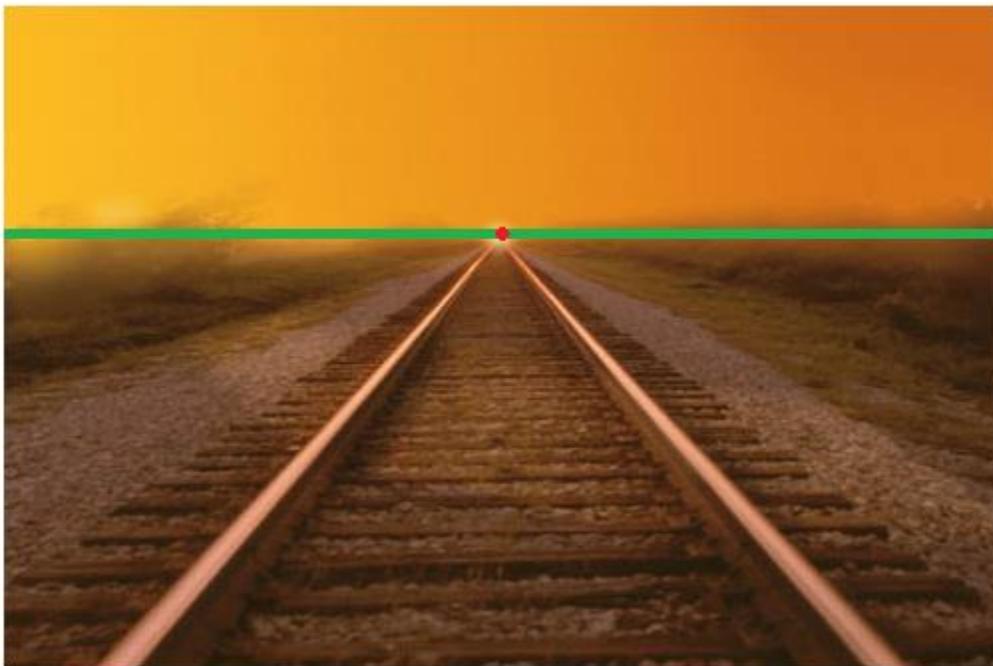
Molto più tardi trovai che infatti su può costruire un'interessante branca della geometria proprio giocando su questi punti (e rette, e piani) all'infinito, che evidentemente nessuno raggiunge mai, e quindi non vede mai (Ma è proprio vero?). E tanto per annunciare qualcosa di curioso, un piano contiene infinite rette, ma una sola retta all'infinito, che congiunge tutti i punti all'infinito, mentre lo spazio contiene infiniti piani, ma ha un solo piano all'infinito, su cui giacciono tutte le rette all'infinito di tutti i piani.

Fra l'altro questo ci dice perché le parallele si incontrano in un solo punto all'infinito, o, in altre parole, che una retta ha un punto all'infinito e non due, cioè, seguendo un binario verso destra troviamo all'infinito il punto di incontro delle due rotaie parallele, e se andiamo verso sinistra troviamo lo stesso punto di incontro all'infinito. Se i due punti nel caso delle parallele non coincidessero ciò vorrebbe dire che due rette si incontrano in due punti. Ma questo va contro uno dei postulati di Euclide, che dice che due rette si incontrano in un solo punto, ovvero hanno un solo punto in comune.

Se una retta avesse due distinti punti all'infinito, uno a destra e uno a sinistra, per questi due punti all'infinito passerebbero due rette, cioè la retta di cui parliamo e la retta all'infinito. Ma questo va contro un altro dei postulati di Euclide, che dice che per due punti si può tracciare una e una sola retta, cioè hanno una sola retta in comune. I due postulati che verrebbero violati hanno una strana somiglianza. In certo senso, dato uno dei due, si trova l'altro scambiando tra loro le parole "punto" e "retta".

| | **Punti** | | **Retta** | |
|---|---|---|---|---|
| **Due** | | **hanno 1** | | **in comune** |
| | **Rette** | | **Punto** | |

Questa proprietà è un primo, semplice esempio di una proprietà più generale che si chiama "dualità" ed è valida per certe branche della geometria. Inoltre, introducendo i punti e le rette all'infinito, questa proprietà non ha più eccezioni, quali sarebbe l'esistenza di rette parallele.

La branca della geometria che gioca con i punti all'infinito ha un'applicazione pratica che tutti conosciamo, la teoria della prospettiva. Se disegniamo una strada o una ferrovia che fugge davanti a noi, in prospettiva possiamo disegnare il suo punto all'infinito (in rosso), che è sull'orizzonte, il quale a sua volta è la rappresentazione grafica della retta all'infinito (in verde).

Ma come forse sapete la storia delle parallele è interessante per se stessa.
Duemilatrecento anni fa Euclide mise insieme su basi che riteneva inoppugnabili (ma chi era nella testa di Euclide per dire quanto ci credesse?) la geometria.

I suoi elementi per costruirla, come i mattoncini del lego, sono
- 23 **definizioni**

- 5 **postulati ( in greco “aitémata”),** di cui non viene data dimostrazione.
* I) Un segmento di linea retta [e uno solo] può essere disegnato unendo due punti a caso.
* II) Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta
* III) Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro
* IV) Tutti gli angoli retti sono congruenti ( o uguali) tra loro
* V) Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.

Questo postulato, espresso così, è un po’ complicato da seguire, anche se può essere utile. Diventa più chiaro se lo si esprime nel modo seguente:
* (Vb) In un piano, dati una retta ed un punto fuori di essa, si può condurre una e una sola parallela alla retta data.

La definizione 23 stabilisce che due rette sono parallele se giacciono sullo stesso piano e continuate in entrambe le direzioni non si incontrano né dall’una né dall’altra parte.

- 5 **nozioni comuni**:
* 1) Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
* 2) Aggiungendo (quantità) uguali a (quantità) uguali le somme sono uguali
* 3) Sottraendo (quantità) uguali da (quantità) uguali i resti sono uguali
* 4) Cose che coincidono con un'altra sono uguali all'altra
* 5) L'intero è maggiore della parte

Non dice qui che si possono far slittare figure piane su un piano, e che quelle che sovrapposte coincidono sono eguali. Cioè, come fu notato, questa definizione di eguaglianza è poco chiara e del resto Euclide non la usa quasi mai.

Il postulato V è differente dagli altri per la sua lunghezza, e per il fatto che non è intuitivo come gli altri (ma gli altri, sono proprio tanto intuitivi?).
Ad ogni modo, molti matematici, fin dai tempi più antichi ritennero che questo non fosse propriamente un postulato (di cui non si richiede dimostrazione) ma un teorema (che invece può – e quindi deve - essere dimostrato) e si arrabattarono inutilmente per duemila anni cercando una dimostrazione.
Da notare che le prime ventotto “proposizioni” di Euclide non richiedono il quinto postulato per la loro dimostrazione.

Circa duecento anni fa si incominciò a pensare che non solo il V postulato non fosse un teorema, ma si potessero costruire delle geometria “diverse”, per esempio una geometria in cui dati una retta $r$ ed un punto $P$ fuori di essa non esistono rette passanti per $P$ e parallele a $r$ (che cioè non la incontrano). Oppure una geometria in cui per $P$ passa più di una parallela ad $r$. Il Principe lavorò su questo progetto, ma non pubblico nulla perché, disse, “Temeva lo schiamazzo dei Beoti” (aveva una certa cultura classica).

Vediamo dunque alcune semplici “geometrie diverse”.

Anzitutto costruiamo una **geometria senza parallele.**
Costruiamo un cubo o esaedro.  Anzi, a noi basta costruire un vertice di un esaedro. Si prende un quadrato grande, si disegnano  quattro quadrati che lo dividono in parti eguali, tagliamo via uno dei quadrati, ma non lo buttiamo via perché ci servirà dopo. Poi incolliamo lungo i due tagli che abbiamo fatto.  Ora  abbiamo un vertice di cubo.
Se su una faccia del cubo, o anche a cavallo di uno spigolo, ma non a cavallo del vertice che abbiamo costruito noi disegniamo figure piane, esse hanno le stesse proprietà che sul piano. Per esempio  la somma degli angoli interni di un triangolo vale due angoli retti e non ci può essere un triangolo con due o tre  angoli retti. Per esempio, due parallele non si incontrano. Per esempio, la circonferenza del cerchio vale $2\pi R$. Per esempio, se disegniamo un triangolo e supponiamo che sia il percorso di un gruppo di artiglieri che trasportano un cannone che punta sempre in una certa direzione, fatto il giro del triangolo troviamo che il cannone punta nella stessa direzione.

Ma, appena includiamo nei nostri vari esercizi l'unico vertice che abbiamo troviamo che possiamo avere un triangolo in cui i tre angoli sono retti - impossibile nel piano. La figura sottostante vi fa vedere un triangolo nel piano (Fig.I) e  uno anomalo sul cubo (Fig.2). Si vede anche che se il segmento azzurro è un cannone, gli artiglieri che lo portano a spasso sul triangolo A B C puntandolo nella stessa direzione,  si ritrovano in A col triangolo sempre puntato nella stessa direzione, mentre sul cubo si trovano in ritardo o in anticipo di 90°, secondo la direzione in cui percorrono il triangolo ABC.

Fig.I

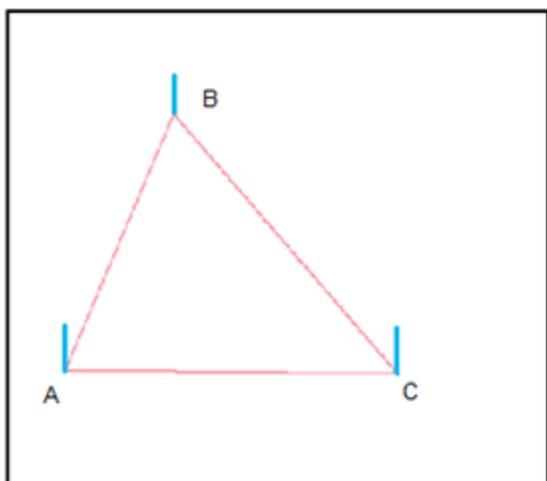
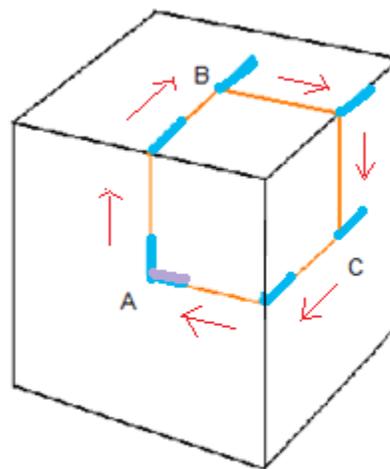
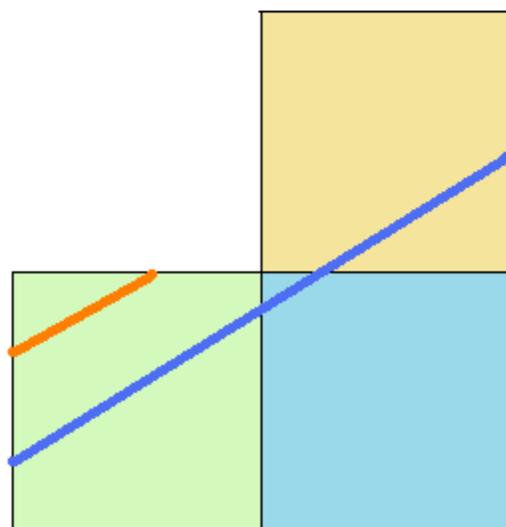
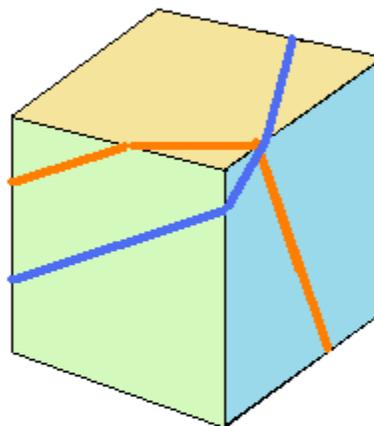
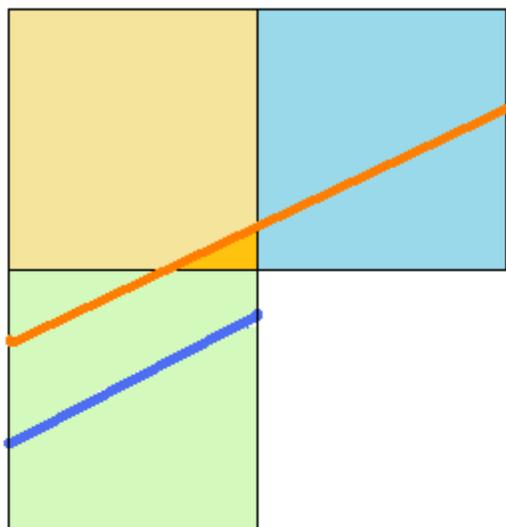
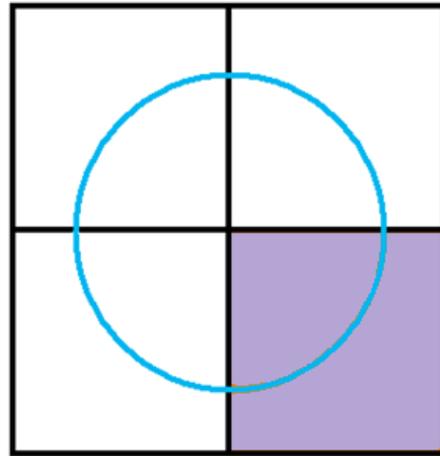
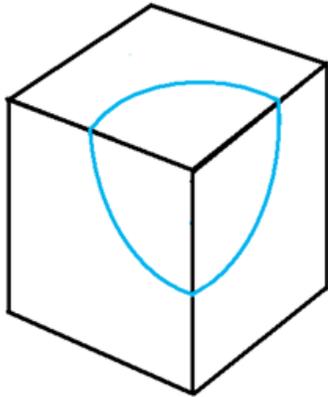
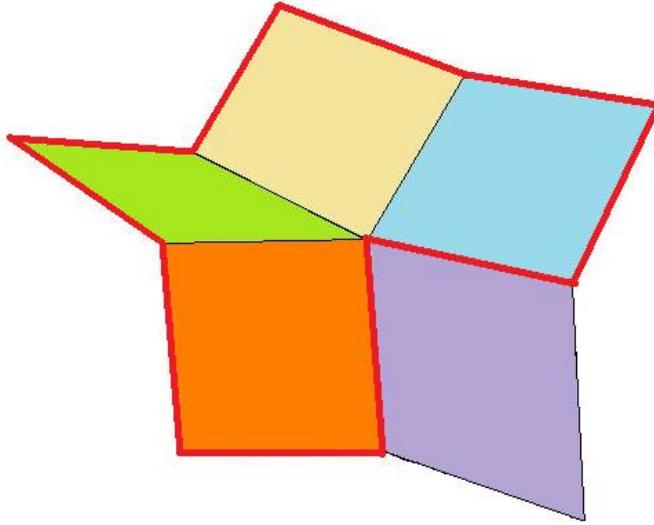



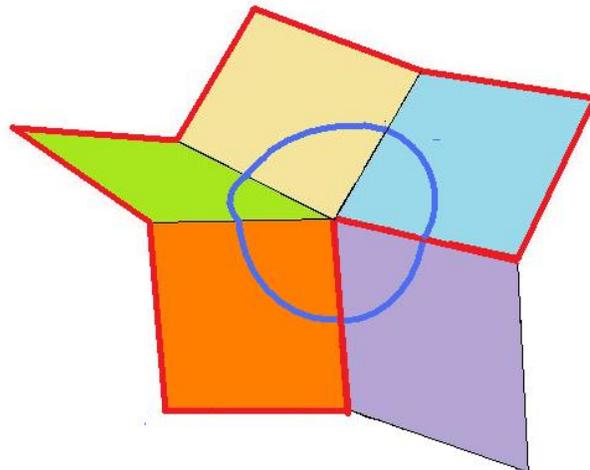
Fig.2

In secondo luogo due rette parallele si incontrano.
Notate che per provare questo bisogna saper disegnare delle rette su un cubo. Lo si fa sviluppando il cubo sul piano.
In questo sviluppo, tanto la retta arancione quanto la retta blu sono rette e nella faccia di partenza sono parallele.
Però la retta blu della figura sottostante continua sulla faccia arancione della figura soprastante.

In terzo luogo la circonferenza è una frazione di $2\pi R$ (per esempio, quella disegnata in figura è

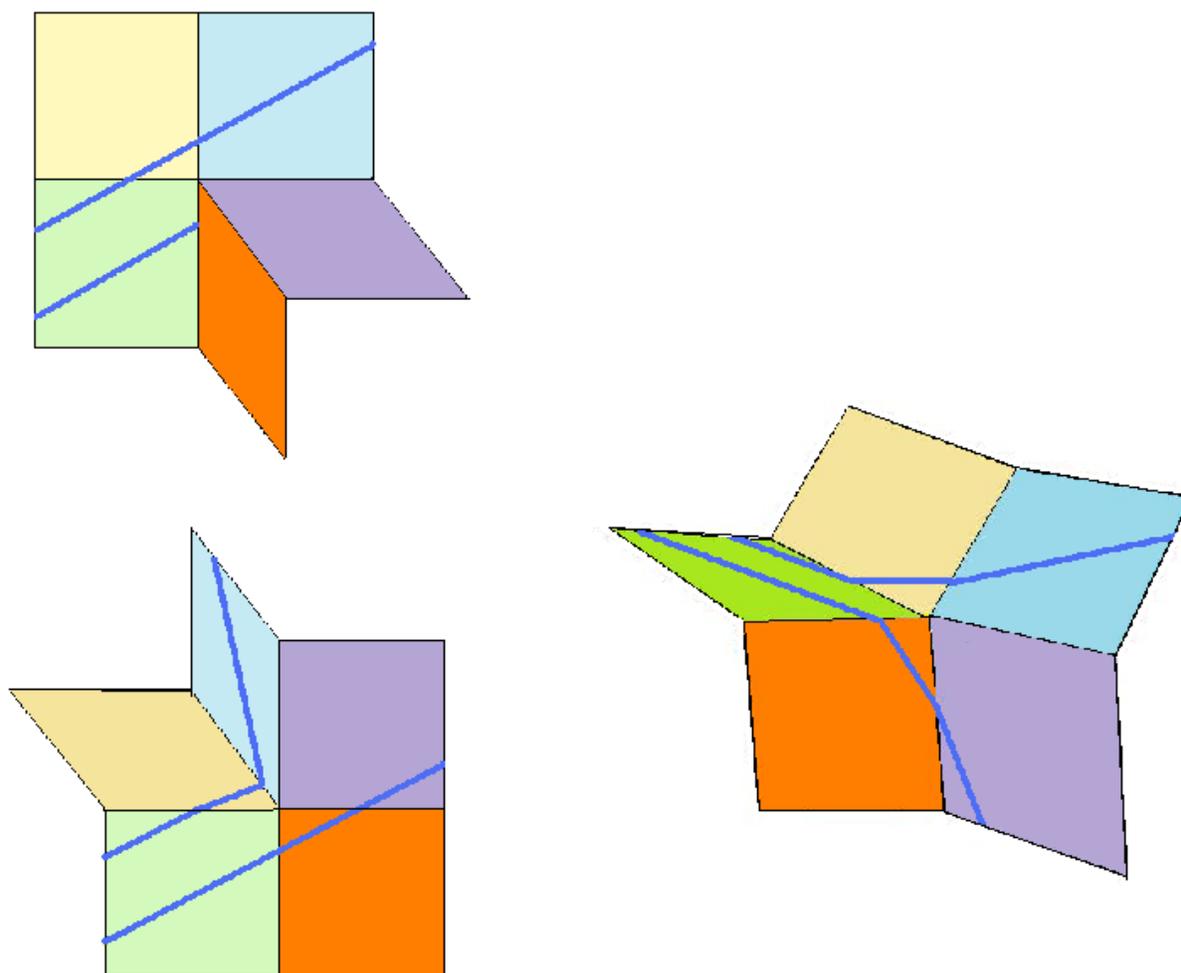
$\frac{3}{2}\pi R$).
Lo si vede subito perché se disegniamo un cerchio che comprende un vertice del cubo ne perdiamo il quarto “violetto”.

Che è successo? La geometria non è più quella.

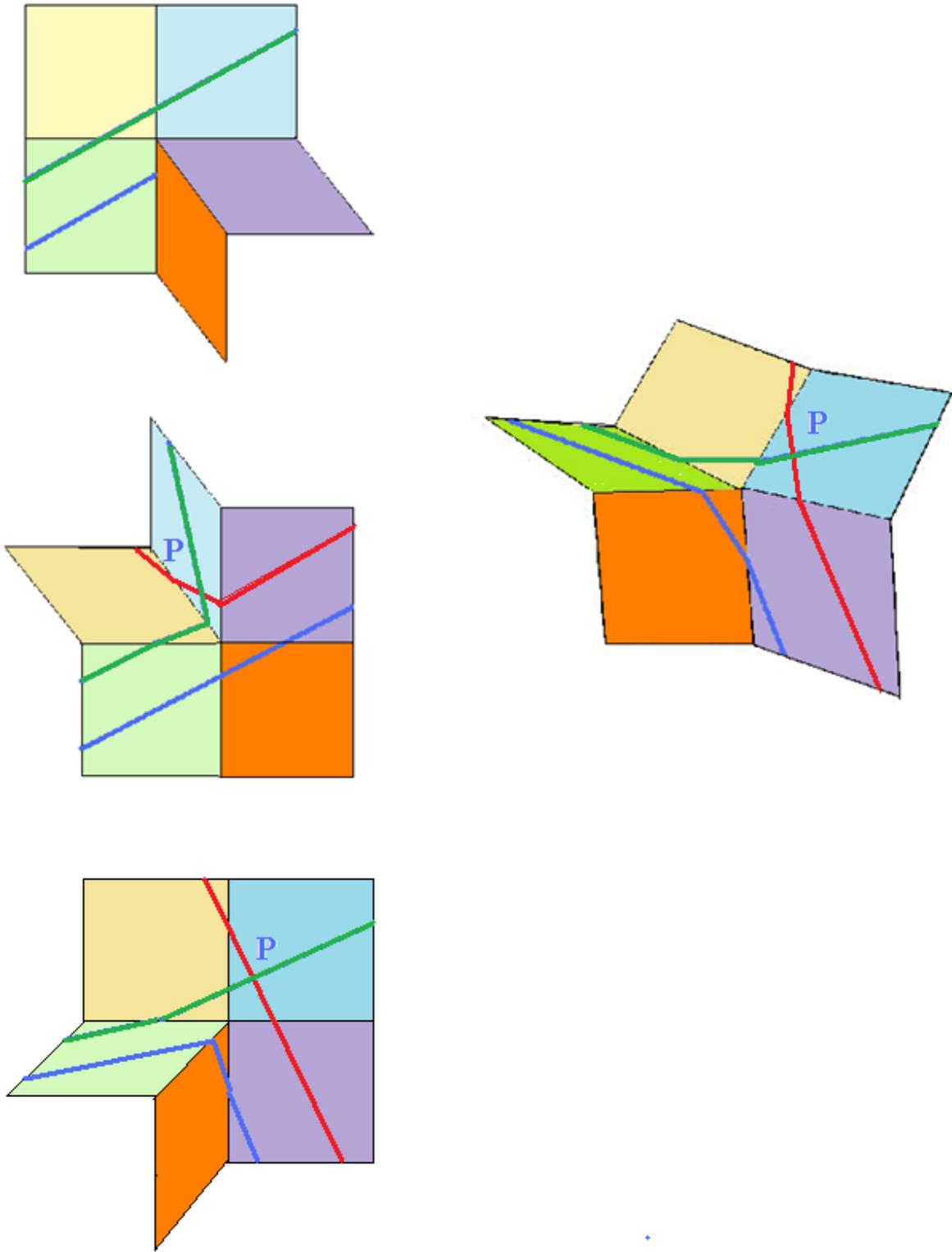
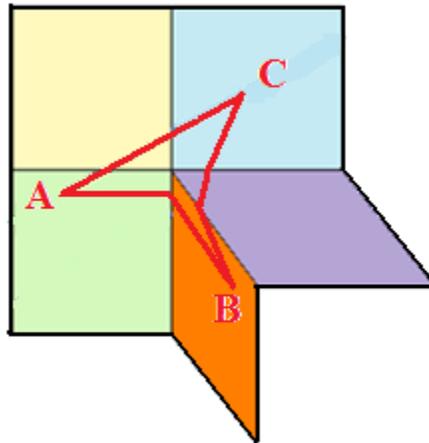
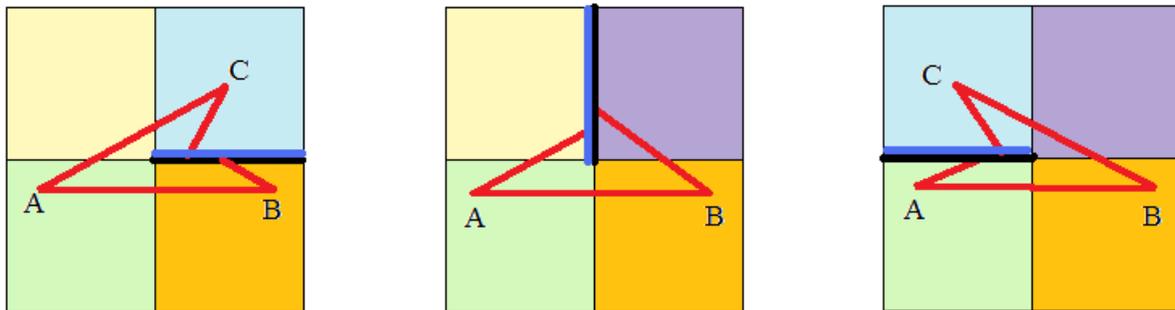
Ed ora vediamo **una geometria con più di una parallela.**

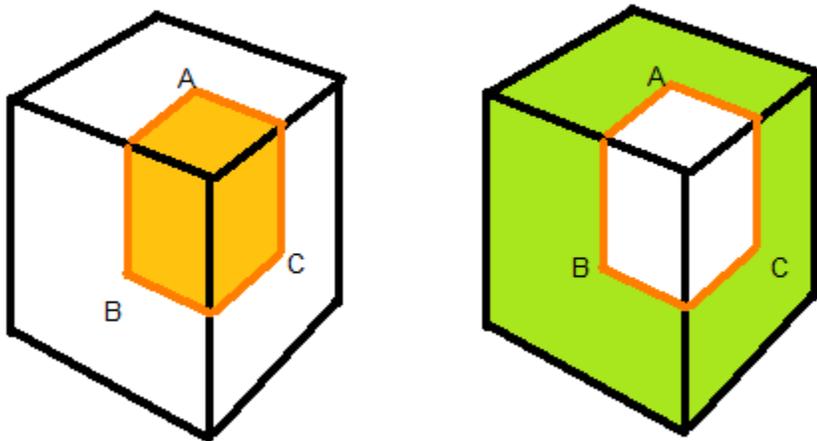
Supponiamo di prendere un altro quadrato, tracciare le due rette che lo dividono in quattro parti eguali, Poi tagliamo con un paio di forbici dalla periferia al centro del quadrato grande lungo una delle rette. A questo punto inseriamo il quadrato che avevamo avanzato costruendo il cubo e incolliamo i due lati ai due lati del taglio. Otteniamo così una specie di sella. Nel caso dl cubo, per così dire, avevamo troppo poca superficie a disposizione, qui ne abbiamo troppa.

Nella figura, la parte con il bordo rosso è il quadrato originale. Il quadrato lilla  è quello che avevamo avanzato facendo il nostro vertice di cubo.

Di nuovo, se evitiamo il punto centrale (punto sella) tutto va bene.  Ma se includiamo nei nostri disegni il punto centrale, abbiamo altre sorprese:
- si possono costruire triangoli in cui la somma degli angoli interni è minore di 180 gradi (impossibile nel piano);
- due rette parallele divergono;
- la circonferenza è più lunga di $2\pi R$ (nel nostro caso è $\left(\frac{5}{2}\right)\pi R$ )

- quando giungono al punto di partenza, gli artiglieri trovano che il cannone punta a 90 gradi rispetto all'orientazione iniziale, in direzione opposta al caso del cubo..

Di nuovo, la geometria non è più quella.

Anche sulla sella le parallele si comportano in modo strano se includono il punto sella: invece di restare parallele equidistanti come sul piano, o di incrociarsi, come sul vertice di un cubo, divergono.

Il, problema, tanto per il cubo quanto per la sella, evidentemente sta nel punto vertice. Questo è un punto "singolare".

Non solo le parallele divergono, ma anche, per un punto passano due parallele ad una retta.
Nel disegno allegato, presa la linea blu come nostra “retta” di riferimento, vediamo che per il punto P passano due parallele alla linea blu: la linea verde, che è certo parallela nel quadrato verde, e la linea rossa, che è certo parallela nel quadrato viola. Entrambe le linee poi divergono e non incontreranno mai la linea blu. Secondo la nostra vecchia definizione di parallele, invece, data una retta ed un punto fuori di essa, si può trovare solo una e una sola parallela (retta che non incontra “mai” la retta data).

E naturalmente possiamo prevedere che i triangoli che includono il punto sella siano più magri di quelli tracciati sul cubo. Un triangolo come quello denominato ABC in figura ha tre angoli di circa  trenta gradi ciascuno in media, il che – a occhio - dà una somma degli angoli interni di circa 90 gradi invece che 180°.

La costruzione è (più o meno) come segue:

La linea nera e blu indica i tagli dove manca una faccia. Ma le figure dimostrano che tutti i lati, i quali si estendono su due o tre facce, sono segmenti di retta.

I nostri (cinque) poliedri regolari anche loro hanno dei punti singolari, i vertici, in cui analoghi fenomeni si riproducono. In una sfera  tutti i punti sono in certo senso singolari, e quindi su una sfera i triangoli, le parallele, le circonferenze, i trasporti di cannoni presentano qualitativamente gli stessi problemi che esistono sul cubo intorno al punto singolare, ed i problemi aumentano man mano che aumentiamo la percentuale di area della sfera che interessiamo nei nostri esercizi.

Consideriamo il nostro triangolo ABC che a prima vista presenta tre angoli retti. Se noi definiamo triangolo la figura su un cubo costituita da tre segmenti di retta che uniscono tre punti, notiamo che anche la figura verde esterna al triangolo arancione è anche lei un triangolo ad ogni buon diritto. E questo triangolo ha tre angoli retti ad ogni vertice, per un totale di nove angoli retti, 810 gradi, altro che 180 gradi come sul piano!
Tracciando figure su un cubo o su un altro poliedro, quanti più punti singolari si includono, tanto più i fenomeni strani aumentano. Però, dato che i "punti singolari" sono separati fra loro, i problemi aumentano per così dire a gradini. Sulla sfera, invece, dove tutti i punti sono "singolari", non si procede a gradini e quanto più grandi sono le aree coinvolte, tanto più grandi sono le deviazioni dalla geometria come noi la conosciamo.

Supponiamo che sulla superficie di una grande sfera vivano piccoli esseri piatti, in due dimensioni. Essi quindi non hanno nessuna concezione della terza dimensione, e quindi del fatto che il mondo in cui abitano è una superficie curva che si sviluppa su tre dimensioni. (Non sono esseri particolarmente stupidi, per quanto piatti: anche noi, dopotutto , viviamo su una sfera, che però ci pare piatta. Esiste addirittura ancora – credo - una società di gente convinta che la Terra sia piatta). Finché si contentano di disegnare triangoli piccoli, non ci sono triangoli che contengono due angoli retti, le parallele non si incontrano mai. Il trasporto di un cannone non desta sorprese. La circonferenza di un cerchio è $2\pi R$.
Tuttavia le creature, andando a grandi distanze possono capire che la geometria non è quella di un piano, che loro avranno studiato in teoria come la geometria che meglio rappresenta una porzione piccola del loro mondo. E se non possono staccarsi dal piano?

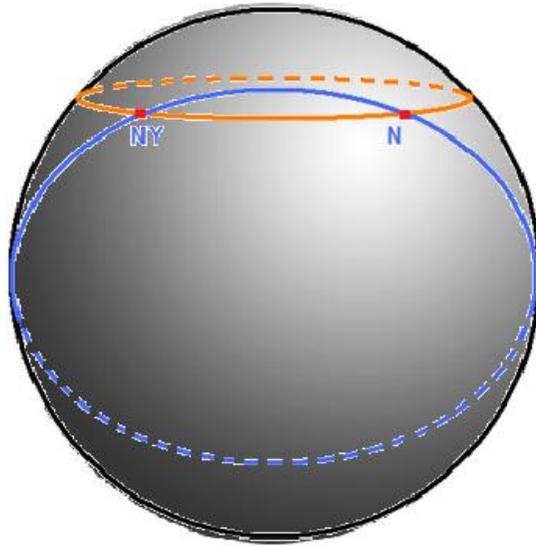
Alla fine, insomma, vediamo che aveva ragione Euclide a considerare il suo quinto postulato come un postulato e non come un teorema. Su un cubo (o una sfera) due parallele si incontrano (e quindi non ci sono parallele). Intorno ad un punto sella divergono, per cui si possono accomodare altre parallele.

Non si può quindi dimostrare che dati una retta ed un punto fuori di essa si può tracciare una ed una sola parallela alla retta data. Se questa affermazione è considerata un teorema, che pure si

basa su definizioni ed assiomi della geometria di Euclide, esso non è "decidibile". Soltanto, a partire dalle diverse risposte che preferiamo dare a quel teorema, tutte egualmente valide, si creano differenti geometrie.
In ultima analisi è un fatto sperimentale decidere se nel nostro mondo valga la geometria di Euclide (una sola parallela) od altra. Il risultato curioso è che su zone relativamente piccole la geometria di Euclide va sempre bene, ma se si guarda più lontano, per esempio con telescopi potenti, si vede che essa non basta più e ne occorre un'altra.

Qualcuno potrà dire: è chiaro che la geometria che vale sul piano non può valere su un cubo e su una sfera. In particolare, noi non possiamo tracciare rette su una sfera, perché le rette sono diritte e la superficie della sfera è curva. Quindi una retta esce subito dalla sfera.
Questa osservazione è perfettamente corretta. Molto sovente, quando un insegnante parla o si trova qualcosa di scritto su un libro, non si osa fare obiezioni, che in genere sono piene di buon senso. Fare obiezioni meditate e ricevere buone risposte è il modo migliore di imparare.

Dunque, quando si parla di "rette su una sfera" non si parla propriamente di rette, ma di linee (inevitabilmente curve) che hanno molte delle proprietà di una retta, eccettuata, appunto, la storia delle parallele. Euclide non definisce mai la retta, ma dice che è un concetto primitivo. Se noi riuscissimo a parlare con esseri che vivono su un altro mondo, magari troveremmo che i loro concetti primitivi sono diversi. Quello che importa sono certe proprietà della retta: che dati due punti, si può tracciare uno ed un solo segmento di retta che li congiunge, e questo segmento di retta rappresenta il più breve percorso fra i due punti. Per quanto ne so io, questa seconda proprietà della retta in passato era presa come non dimostrabile e più o meno evidente. Per esempio si sapeva che tendendo un elastico fra due punti su di un piano esso si disponeva secondo un segmento di retta. In seguito se ne poté dare una dimostrazione matematica. Ma, come si capisce bene, la dimostrazione matematica è legata ad una definizione di distanza. Per esempio, nella "geometria del taxista" la retta non è il cammino più breve fra due punti, a meno che accettiamo che per due punti passi più di una retta, ciò che ad Euclide decisamente non piaceva.

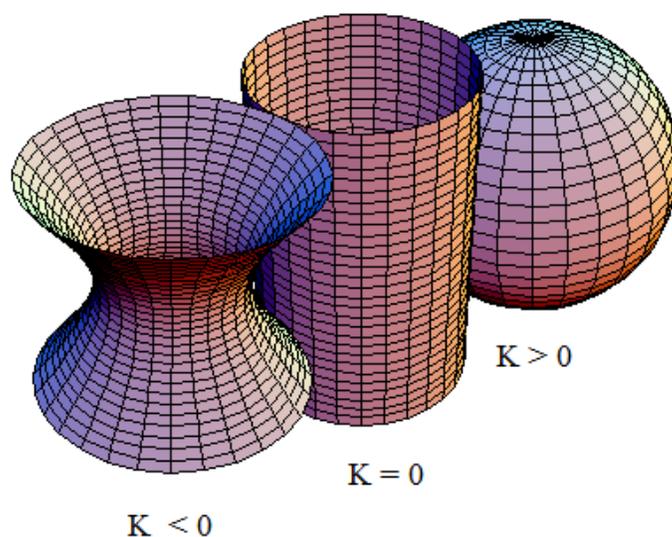
Anche su una sfera si possono tracciare linee che rappresentano il più breve percorso fra due punti. Se prendete un mappamondo (liscio) ed un elastico sottile, che possa scivolare sulla superficie, e poi con due dita tenete fermi sulla sfera i due estremi dell'elastico, vedrete che naturalmente l'elastico si dispone secondo il cammino più breve - e ne esiste uno solo: se allontanate l'elastico dal suo cammino, ci torna appena può, Quella è la vostra "retta sulla sfera". Per non far confusione con la retta che noi conosciamo dalle elementari, i matematici la chiamano "linea geodetica", un nome tradizionale che viene dalla geografia. Se poi guardate ancora meglio, vedete che la linea che unisce i due punti è un arco di cerchio massimo. Questo è evidente se fissate un punto a un polo ed un altro dove volete: l'elastico si disporrà lungo il meridiano che unisce il polo a quel punto. Vedete quindi una cosa che molti non sanno: se dovete volare da Napoli a New York per la via più breve (per risparmiare kerosene), non dovete seguire il quarantunesimo parallelo su cui entrambe le città si trovano, più o meno, cioè il percorso arancione, ma un percorso diverso, quello azzurro (provate con l'elastico sul mappamondo).
Il percorso azzurro è parte di un cerchio massimo. Infatti, su una sfera gli equivalenti delle rette sono i cerchi massimi, che sono tutti egualmente lunghi e tutti si intersecano in due punti.

Per trovare la distanza tra due  punti nello spazio, potrebbe dire qualcuno, dovremmo usare il teorema di Pitagora in tre dimensioni. Da cui:

$$d^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2.$$

Questa distanza, che dovremmo percorrere bucando la sfera, è certo minore di quella misurata sull'arco di cerchio massimo. Per un esempio banale, si veda la distanza fra il Polo Nord ed il Polo Sud. Misurata sull'arco di meridiano è $\pi R$, ma misurata attraverso il centro della terra è 2R, che è più o meno 2/3 della precedente.
Per rendersi conto delle cose suggerirei di applicare la formula della distanza Euclidea al caso dei due poli, per esempio prendendo $P_1$ come Polo Nord e $P_2$ come Polo Sud,  e dimostrare che è appunto 2R.

Torniamo alla geometria della superficie della sfera. Se  tracciate una retta, cioè  una geodetica per il cortile di casa vostra, la potete continuare fino a che tornate a casa vostra. Dopo quanti chilometri? Sempre 40.000, in qualsiasi direzione tracciate la vostra geodetica (veramente non proprio - ma sono finezze che dipendono dal fatto che la Terra non è una sfera perfetta).

Il Principe fece qui un'altra scoperta, che chiamò "Theorema egregium". Le proprietà che stiamo studiando sono nella struttura della superficie, e si chiamano proprietà intrinseche. Non occorre cioè guardare la sfera dall'esterno. Esseri bidimensionali viventi sulla superficie della sfera misurando angoli e distanze e simili possono capire che la loro sfera non è un piano, senza che nessuno di essi venga assunto nella terza dimensione.  Se noi prendiamo una superficie e la arrotoliamo, stendiamo eccetera, ma senza mai causare strappi e deformazioni, esiste una proprietà misurabile (che lui chiamò curvatura intrinseca ed i suoi successori chiamarono in suo onore "curvatura gaussiana") che rimane costante nonostante queste operazioni. Tale curvatura intrinseca è zero per un piano, positiva per una sfera e superficie affini, negativa per una sella.  Il

teorema egregio afferma specificamente  che si può sviluppare una superficie su un'altra soltanto se le due superficie hanno la stessa curvatura intrinseca (K). Un piano può essere tranquillamente arrotolato su un cilindro, che ha pure curvatura zero, ma una sfera non può essere sviluppata su un piano (né su un cilindro), perché le curvature sono differenti (l'una positiva e l'altra zero).

Dunque il vecchio problema dei geografi, che volevano disegnare la superficie terrestre su di un piano, cioè proiettare  una sfera su un piano senza tagli o deformazioni, il problema centrale delle carte geografiche, è  insolubile.  L'unica cosa che si può fare è limitare le deformazioni ed i tagli alle zone che ci interessano meno.  In fondo i cartografi erano queste cimici intelligenti che scoprivano che la curvatura della Terra non era zero.

Anche  uno spazio in tre dimensioni come il nostro può avere una curvatura intrinseca che si sviluppa in quattro dimensioni, di cui noi non abbiamo percezione, ma che possiamo in qualche modo calcolare dalle proprietà intrinseche del nostro spazio in tre dimensioni, proprio come i nostri esseri bidimensionali viventi su una sfera possono calcolare le proprietà del loro spazio in due dimensioni, che si curva nella terza dimensione.

Ma per questi studi occorre un bagaglio matematico un po’ più adeguato, che senz'altro voi potrete un giorno procurarvi. Viaggerete così nel reame della geometria differenziale, lo strumento di cui si serve la relatività generale, la famosa teoria di Einstein.

Ad ogni modo, una domanda resta: senza uscire dal loro mondo, come possono fare questi esseri bidimensionali intelligenti a sapere se vivono su un piano o su un cilindro, visto che K è la stessa nei due casi?

## LVII. RITORNO A KOENIGSBERG.

David Hilbert

- *Ehilà, Davide, gridò un amico ad un trentenne occhialuto che camminava velocemente sulla Magisterstrasse a Koenigsberg Kneiphof (cioè proprio sull'isola da cui partivano cinque dei famosi sette ponti).*
- *Ah, ciao, replicò senza entusiasmo l'occhialuto, che evidentemente stava pensando a qualcosa che lo assorbiva profondamente e non desiderava essere disturbato.*
- *Sempre immerso nei tuoi pensieri? E sempre con quel tuo cappello bianco?*
- *Che c'entra il mio cappello? Chiese Davide irritato.*
- *Ma insomma, con chi ce l'hai?*
- *Se proprio vuoi sapere, ce l'ho con Euclide.*
- *Ma non hai niente di meglio da fare? E' morto da un pezzo.*
- *Morto sì. Ma ti rendi conto che da quando esistono i suoi "Elementi" , o da quando sono stati stampati, ogni persona colta deve averli letti e prenderli come oro colato? Il suo influsso nefasto continua.*
- *Piano, disse l'amico, non esageriamo.*
- *Va bene, lo so, esagero. Ma il fatto è che l'opera di Euclide, al quale mi inchino, ne ha fatto un mostro sacro. Guai se uno si permettesse di dire che è meno che perfetto. E invece ci sarebbe molto da ridire.*
- *Non ricomincerai anche tu con il Quinto Postulato.*
- *Ma no, il quinto postulato sta bene com'è, e ci hanno già pensato altri. Quello che non mi va è proprio com'è costruito il sistema.*
- *Ma che cosa c'è che non va nel sistema?*
- *Allora, se vuoi sapere, stammi a sentire. Anzi, meglio, entriamo in questa birreria, beviamo una birra e ti spiego.*

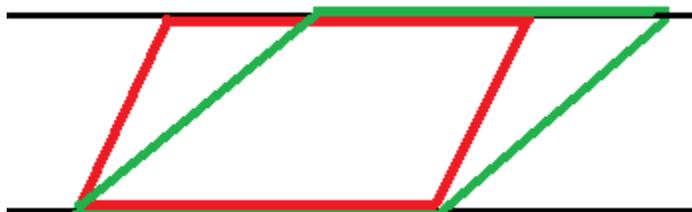
*I due entrano nella birreria, ordinano una birra e si siedono.*

- *Dunque, gli "Elementi" di Euclide constano di tredici libri. Il primo libro…*

- *Calma, non vorrai farmi il riassunto degli "Elementi"?*
- *Qualcosa dovrò pur dirne, se vuoi sapere cosa penso degli "Elementi".*
- *Allora avanti.*
- *Dunque gli "Elementi" si aprono con ventitré Definizioni (che lui chiama "Oroi"), cinque "Postulati" che lui chiama "Aitémata"(le due parole sono l'una la traduzione dell'altra, postulati in latino, aitemata in greco) e "Cinque nozioni comuni". Niente di tutto questo può essere dimostrato. Poi attacca con le "Proposizioni" divise in "Teoremi" e "Problemi". Da secoli si discute se i Postulati e le Nozioni Comuni siamo poi tanto diversi. E da altrettanto tempo si discute la stessa cosa su Problemi e Teoremi.*
- *Va bene, mettiamo pure che postulati e nozioni comuni siano la stessa cosa e che anche teoremi e problemi siano la stessa cosa - anche se io, personalmente, qualche differenza la vedo. Per esempio mi sembra che i postulati si riferiscano a oggetti geometrici e le nozioni comuni abbiano un carattere più generale e possano valere per altre scienze.*
- *Va bene, va bene, disse frettolosamente Davide agitando le mani come per scacciare un pensiero molesto.*
- *E anche credo che la distinzione delle Proposizioni in Teoremi e Problemi sia posteriore a Euclide. Lui elenca solo i numeri e non dice se siano Proposizioni, Problemi o Teoremi.*

*Davide era evidentemente vessato. Disse:*

- *Ma il problema non è la terminologia. Per me il problema sta nelle definizioni. Le proposizioni vanno dimostrate e quasi tutte le dimostrazioni di Euclide sono accettabili. Assiomi e nozioni comuni sono elementi necessari. Secondo me sono la parte essenziale del sistema, anche se si potrebbero enunciare meglio.*
- *Meglio di Euclide?*
- *Ma sicuro. Molto meglio. Alcuni di questi assiomi praticamente non li usa mai neanche lui. Che bisogno c'è di elencarli? Altri li usa senza averli elencati. Dove ha mai detto che due cerchi con centro agli estremi di un segmento e raggio eguale alla lunghezza del segmento si intersecano?Eppure questa proprietà la usa per costruire un triangolo equilatero. Vecchio truffatore! E l'imprecisione! E poi il disordine, Mein Gott! Il disordine. Ma ne parliamo dopo. Per me il problema sono le definizioni.*
- *Cioè?*
- *Sono impossibili, sono necessariamente vaghe, sono inutili!*
- *Perché impossibili? Perché vaghe? Perché inutili?*
- *E' ovvio che sono impossibili. Ogni definizione di un concetto nuovo deve essere data usando parole il cui significato è noto. Ma se uno non conosce il significato di qualcuna di queste parole, ha bisogno che anche queste siano definite. Alla fine della catena o ti ritrovi al punto di partenza, cioè usi nella definizione alcune delle parole che devi definire, oppure ti trovi con delle parole che non puoi definire. Naturalmente questo non si applica a tutte le definizioni di Euclide, soprattutto se sono date basandosi su parole definite nelle precedenti definizioni.*
- *Voglio un esempio.*
- *Subito. Definizione N.1 : "Un punto è ciò che non ha parti". Anche il nulla non ha parti. Che cosa distingue il punto dal nulla? E poi guarda la definizione di angolo retto, Definizione 15. Dice che se una linea viene tracciata da un punto ad un'altra linea e forma al punto di contatto due angoli eguali, questi sono retti.*
- *Mi pare chiaro.*

- *Non lo è affatto, se non sai cosa voglia dire eguale. Alla fine o non sai cosa vuol dire angolo retto o non sai cosa vuol dire eguale.*
- *Euclide non lo dice?*
- *No che non lo dice. Le cinque nozioni comuni (che vengono dopo le definizioni) si riferiscono alle proprietà di cose eguali e non eguali. Ma la quarta nozione comune dice che due cose sono eguali se coincidono. E che diavolo vuol dire? Però quello che non perdono a Euclide è la Proposizione 35, che dice che due parallelogrammi tracciati tra le due stesse parallele e con egual base sono eguali. Dice proprio così, "eguali", stessa parola. Semmai è eguale l'area, che Euclide non definisce. E due parallelogrammi come quello verde e quello rosso non coincidono e non possono esser portati a coincidere, anche se hanno la base in comune e sono tracciati fra le stesse parallele..*

- *Ho capito. Ma allora, cosa vorresti fare?*
- *Ovvio, bisogna eliminare le definizioni.*
- *Ma allora non sapresti neanche di cosa parli.*
- *In pratica neanche Euclide sa bene di cosa parla. Ma non ce n'è bisogno. Per me la geometria è una costruzione architettonica, come una cupola grandiosa. Non ti importa di che cosa è fatta, sassi, ferro, legno… quello che importa è la legge secondo cui tutti i pezzi sono messi insieme, che non permette alla cupola di cadere. Così la geometria: niente definizioni, solo le leggi a cui elementi (che non definiremo) devono obbedire. Questi sono gli assiomi. Ed il sistema sta in piedi.*
- *Ma la tua geometria sarebbe un mostro, una costruzione senza fondamenta …. una geometria solo "assiomatica"… un orrore!*
- *Sai che mi hai dato un'idea? Mi sembra il nome giusto. La mia geometria si chiamerà "Geometria Assiomatica". Mi piace.*
- *Non era il risultato che volevo ottenere. Ma ci sono i punti nella tua geometria?*
- *Certo che ci sono.*
- *Oh, finalmente. E che cosa sono?*
- *Sono A, B, C…*
- *Non ho capito. Che cosa sono A, B e C?*
- *Sono i punti.*
- *E le rette?*
- *Semplice. Le rette sono r, s, t…*
- *Ho capito, il resto lo so da me. E r,s,t sono le rette. E magari mi dirai che α, β, γ sono i piani.*
- *Precisamente. Vedo che hai capito.*
- *Ma proprio niente.*
- *Oh, insomma. Punti, linee, rette, sono gli elementi della mia geometria. Non li definisco, ma dico che questi elementi hanno tra loro relazioni mutue, che noi nel linguaggio comune indichiamo con parole come "essere situati", "tra", "continuità",*

*parallelismo", "congruenza", la cui descrizione completa ed esatta deriva dagli assiomi.*

- *Ma allora potresti parlare allo stesso modo di queste tavole, queste sedie, questi boccali di birra. Sarebbero loro i tuoi punti? Le tue rette? I tuoi piani?*
- *Se rispettano i miei assiomi, senza dubbio. E tieni presente che anche i punti , le rette, i piani tracciati su carta sono solo dei rozzi modelli dei punti, delle rette, e dei piani che Euclide aveva in mente. .... Però, sai che mi hai dato un'altra idea? Tavoli, sedie, boccali di birra! Mi piace. Adesso ti lascio.*
- *Ma non mi dici i tuoi cinque assiomi? Sono evidenti quanto quelli di Euclide?*
- *I miei assiomi non saranno affatto evidenti. E chi ti ha detto che saranno cinque? Saranno decisamente di più. Ma non li ho ancora scritti. Penso di enunciarne una ventina, ma in bell'ordine, non come Euclide. Che ne dici di cinque gruppi? Ma quello che è importante è che il mio sistema sia completo e non porti a contraddizioni. Sono sicuro di riuscire. Ma scusa davvero, adesso me ne vado.*
- *Va bene, ciao. Però, quel cappello bianco…*
- *Che c'entra il mio cappello?*
- *Non ti dona.*
- *Va a farti friggere.*

Hilbert era troppo ottimista e nel 1930 Gödel dimostrò che un sistema di assiomi completo e non contradditorio non può essere creato, a meno di essere banale. Ma di questi teoremi, uno dei pinnacoli dell'ingegno umano, si occuperanno quelli che studieranno logica.

Quelli di voi che hanno seguito tutte le nostre divagazioni nel regno della matematica avranno notato che Descartes aveva una soluzione per il problema della definizione di punti e rette. Per lui un punto era semplicemente una coppia ordinata di numeri (x,y) , il primo dei quali è l'ascissa, il secondo l'ordinata. E la retta? La retta era identificata da tre numeri (a,b,c), come abbiamo visto a suo tempo. Con l'annotazione che i tre numeri potevano essere moltiplicati o divisi per lo stesso numero, ed avrebbero individuato la stessa retta.
E con questo, il problema della definizione degli enti punto e linea (nel piano) era, o sembrava, soddisfacentemente risolto. Anche Descartes avrebbe potuto risolvere i suoi problemi senza fare un solo disegno che utilizzasse rozzi modelli di rette e di punti.

Vorrei ora dare un'applicazione dell'opinione di Hilbert che enti qualsiasi (boccali di birra, tavoli e sedie) gli andrebbero bene, pur che rispettino i suoi assiomi. Limitandoci alla geometria del piano, dai suoi assiomi (qui non riportati) derivano tre "assiomi di incidenza", che sono le leggi a cui devono soddisfare gli elementi della sua geometria:

1) Per ogni coppia di punti A, B passa una e una sola retta r.
2) Per ogni retta r, c'e (almeno) un punto P che non giace su r.
3) Per ogni retta r e per un punto P che non giace su di essa passa una e una sola retta s sulla quale giace P che non ha alcun punto in comune con r (questa retta s è la parallela a r).

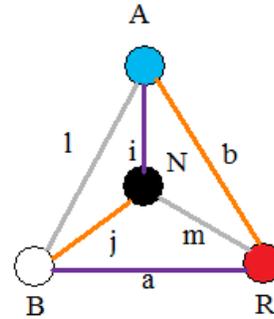
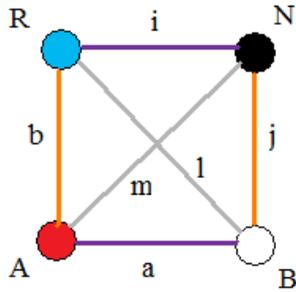
Ora, per rispettare queste tre leggi, che derivano dalla nostra geometria Euclidea, non occorre il piano di Euclide formato da infiniti punti e su cui si possono tracciare infinite rette. Basta un numero finito di oggetti. Inoltre, non occorre che questi oggetti siano punti e linee. E non occorre

che gli oggetti “punti” giacciano sugli oggetti “rette”, ma possono avere con le rette una relazione qualsiasi.

Supponiamo di avere la seguente tabella dei colori delle maglie delle squadre di calcio.

Si chiama “tavola di incidenza”, ma non ci formalizziamo sul nome.

| | Juventus | Milan | Bari | Bologna | Lazio | Inter |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bianco | ● | | ● | | ● | |
| Nero | ● | ● | | | | ● |
| Rosso | | ● | ● | ● | | |
| Azzurro | | | | ● | ● | ● |

Agli incroci della riga “colore” con la colonna “squadra” abbiamo messo un “●” se il colore è presente nella maglia della squadra e niente se il colore non è presente.
Ora si noterà che, per la nostra scelta di colori e di squadre, i tre “assiomi di incidenza” sono rispettati, se per “punti” intendiamo i colori, e per “rette” le squadre .
1) Per ogni coppia di punti-colori passa una e una sola retta-squadra. Esempio: il Milan è l’unica squadra con maglia rossonera.
2) Per ogni retta-squadra c’è un punto-colore (almeno) che non compare sulla maglia. Esempio: la maglia del Bologna non contiene il bianco (e neanche il nero).
3) Per ogni retta-squadra e un punto-colore che non compare nella maglia della detta squadra, c’è una e una sola retta-squadra sulla cui maglia compare quel colore e che non ha punti-colori comuni con la maglia della retta-squadra in questione. Questa è la “parallela”. La Juventus risulta quindi “parallela” al Bologna, il Milan alla Lazio etc.
Inoltre, due squadre non parallele hanno uno e un solo colore in comune. Questo colore è l’intersezione delle due squadre. Esempio: Lazio e Bologna si intersecano nell’Azzurro (sembra quasi il titolo di una canzone).
Questa dunque è la nostra geometria. Che poi possa servire a migliorare il gioco del calcio in Italia ne dubito.
Ogni tipo di relazione definita da una tabella come la nostra ha lo stesso modello geometrico, il “modello minimo”, che contiene in tutto quattro punti e sei rette. Il modello è “minimo” in quanto non si può costruire un modello che soddisfi ai tre “assiomi di incidenza” con meno di quattro punti e sei rette (qualunque cosa questi oggetti siano).
Si tratta di una “geometria finita” il cui modello può essere disegnato in diversi modi. Due esempi:

Le linee dello stesso colore sono parallele. Nel diagramma di sinistra, le due linee grigie (l, m) sembrano incontrarsi, ma il punto di incrocio non fa parte della nostra geometria, che ha solo quattro punti. Quindi possiamo dichiarare che le due rette sono parallele, perché non hanno punti (da noi riconosciuti) nella nostra geometria.

Si possono dare altri insiemi di assiomi ed altri modelli di "geometrie finite".

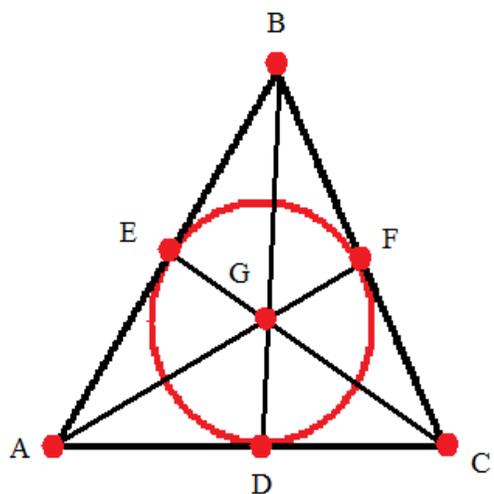
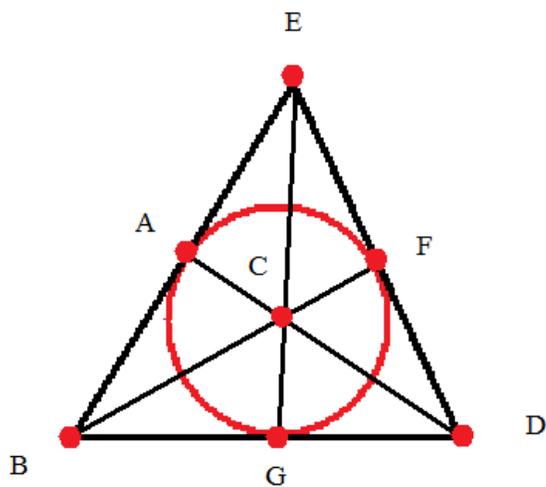
Accenno ad un esempio, che i lettori volonterosi potranno esplorare a loro piacere. Supponiamo di sostituire gli assiomi del piano affine a quello euclideo con assiomi della geometria proiettiva. Come sappiamo, la differenza più appariscente è che in geometria proiettiva due rette hanno sempre un punto in comune, sia esso ordinario o all'infinito. Inoltre, assiomi e teoremi della geometria proiettiva (del piano) hanno la simpatica caratteristica della dualità, cioè un assioma/teorema valido può essere trasformato in un secondo assioma/teorema altrettanto valido semplicemente scambiando fra loro le parole punto e retta. Ciò che è sorprendente è che anche la dimostrazione del teorema duale rimane valida, scambiando le parole punto e retta nel corso della dimostrazione.

Abbiamo così tre nuovi assiomi di incidenza, di cui i tre primi sono evidentemente duali:

1) Due punti distinti qualsiasi appartengono ad un'unica retta (altro modo di dire che dati due punti si può tracciare una ed una sola retta che li congiunge);
2) Due rette distinte qualsiasi appartengono ad un unico punto (altro modo di dire che due rette distinte si incontrano sempre in un solo punto)
3) Esistono quattro punti, nessun terzetto dei quali appartiene alla stessa retta (questo assioma ha il suo duale. Quale?)

Se si vuol fare un modello finito di questa geometria, quattro punti non bastano più e ne occorrono almeno sette. Possiamo prevedere che, per avere dualità completa, in ogni modello occorrerà un numero eguale di rette a quello dei punti. Se ci accontentiamo di sette punti e sette rette, il minimo, abbiamo il "Piano di Fano" (Gino Fano fu un matematico Italiano), un oggetto apparentemente semplice, che qui mi limito a disegnare in forma geometrica, lasciandone l'esplorazione a chi lo desidera.

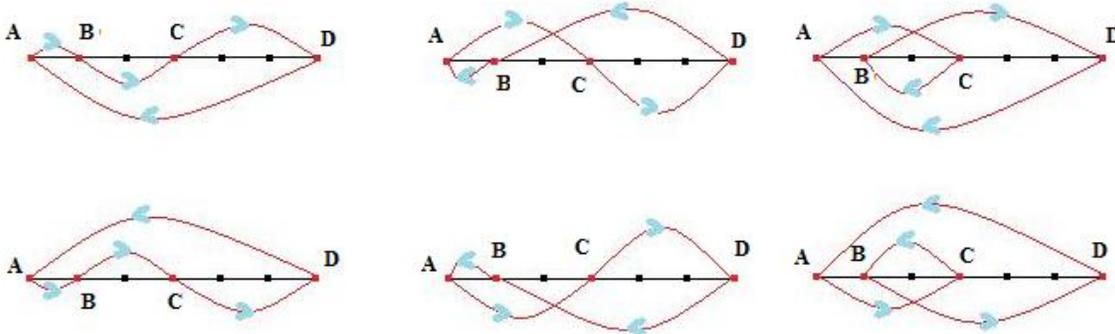
Si noti che i tre punti E, F, D appaiono su una linea che noi non chiameremmo retta, ma piuttosto circolo. Bene, per chi accetta questa geometria con questi assiomi – la retta EFD è una retta esattamente come le altre. Bisogna dunque notare che la rappresentazione data nel

diagramma è assai imprecisa, perché dà l'impressione che il punto G sia in mezzo, in posizione privilegiata, e la retta EFD sia un cerchio.

Il sistema è perfettamente duale: sette punti, sette rette; tre punti per retta, tre rette per punto. Non ci sono rette parallele. Potete dilettarvi a costruire la "tavola di incidenza", sette per sette. E poi potete ribattezzare i sette punti del diagramma come volete mantenendo le stesse "incidenze", per esempio come ho fatto in figura qui sotto. Ora il sistema ha le stesse proprietà, ma G non è più in centro e EFD è diritta come piace a noi (ma AGF ora è un cerchio).

E anche qui ho appena dischiuso la porta su un giardino che ha i suoi cultori. Il giardino, comunque, non è chiuso a chiave, è aperto per tutti coloro che vi sono interessati.

**LVIII. UN SIMPATICO SESTETTO**

Vediamo ora un nuovo gioco.

Prendiamo 4 punti, A, B, C, D, segnati in rosso su una retta,. Mettiamo che la distanza AB sia 1, BC sia 2, CD sia 3. I numeri sono stati così scelti solo per semplicità, ma nessuno vieta di avere numeri più complicati, o anche più semplici, come per esempio tutti 1. I punti in nero sono soltanto per agevolare il calcolo delle distanze.

Adesso proviamo a tracciare una curva continua e chiusa, senza mai cambiare direzione, che attraversi la linea nera nei punti rossi. Potete provare quanto vi pare, ma avete solo sei possibilità, ciascuna delle quali può essere percorsa nei due sensi.

Vedete anche che le sei possibilità sono divise in tre gruppi di due, una sopra e una sotto, in cui quella di sotto non è altro che quella di sopra ribaltata.
A questo punto possiamo mettere dei numeri, cioè le distanze tra i punti, ricordando che l'ordine in cui i punti sono scritti ha una sua importanza, in quanto scrivere gli stessi due punti in ordine inverso implica un cambiamento di segno. Scegliamo l'origine nel punto A, ed avremo che

AB = 1 AC = 3, AD = 6
BA = -1 BC = 2 BD = 5
CA = -3 CB = -2 CD = 3
DA = -6 DB = -5 DC = -3

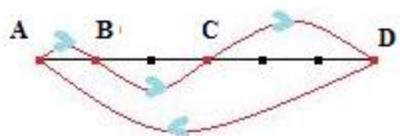
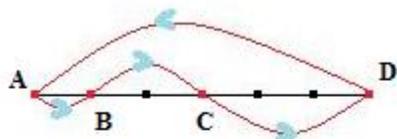
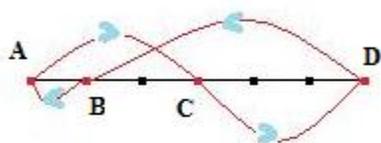
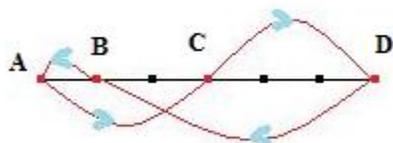
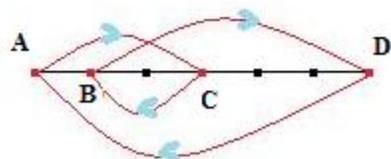
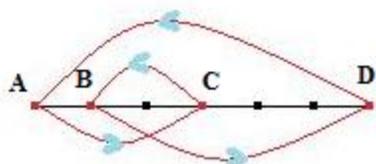
Ora scriviamo delle frazioni  “letteralmente”: i due segmenti di curva che stanno sopra alla nostra retta vanno moltiplicati tra loro e costituiscono il numeratore, i due che stanno di sotto vanno moltiplicati tra loro e costituiscono il denominatore.
Con questa regola, il primo diagramma può essere scritto:

$$\frac{AB \times CD}{BC \times DA}$$

Se poi inseriamo i numeri dalla tabella precedente, abbiamo:

$$\frac{AB \times CD}{BC \times DA} = \frac{1 \times 3}{2 \times (-6)} = -\frac{1}{4}$$

Visto che ci siamo, adesso calcoliamo i valori dei sei diagrammi.

Notate che invertendo l’ordine di percorrenza della curva non cambiamo i risultati. Tutti i segmenti cambiano di segno, e dove avevamo un segno meno e tre segni più, abbiamo ora un segno più e tre segni meno, e il segno del rapporto non cambierà.  Lo stesso succederà per differenti combinazioni di segni.

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot (-6)} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{2 \cdot (-6)}{1 \cdot 3} = -4$$

$$\frac{3 \cdot (-5)}{3 \cdot (-1)} = 5$$

$$\frac{3 \cdot (-1)}{3 \cdot (-5)} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3 \cdot 5}{(-2) \cdot (-6)} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{(-2) \cdot (-6)}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Che tra i sei valori ce ne siano coppie in cui un valore è l'inverso dell'altro è ovvio da come abbiamo costruito il diagramma. Però fate attenzione. Scegliendo uno qualunque dei sei valori come "*x*" vedete che gli altri valori si ricavano eseguendo successivamente le seguenti operazioni:

1) fare l'inverso
2) sottrarre da 1.

e continuando con queste due operazioni alternate fino a che non si torna al valore di partenza. Ad esempio, partendo con - 4 troviamo in successione:

-1/4,  5/4,  4/5, 1/5,  5, -4

e risiamo al punto di partenza. Provate, per vostro diletto, a fare lo stesso gioco partendo dagli altri 5 numeri, e vedrete che dal sestetto non si esce.
Se ci pensate bene, visto che, come ho detto, le distanze tra A, B, C e D potevano essere arbitrarie, il fatto che se ne possa estrarre un numero che ha queste peculiarità ha dell'incredibile. Notate bene, non è strano che scelto un numero x ed eseguendo inversioni e sottrazioni da 1 alternate, dopo sei passi si torni al punto di partenza. Questo è sempre vero. Infatti, preso un x qualunque e facendo le operazioni indicate, si trova in successione:

$$x, \quad \frac{1}{x}, \qquad 1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}, \qquad \frac{x}{x-1}, \qquad 1-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-x}, \qquad 1-x, \qquad x$$

Quello che è strano è che ci sia un legame tra i sei numeri del sestetto ed i "doppi" rapporti delle distanze di quattro punti scelti a caso su una retta, purché presi in un certo modo.

Ma quello che è ancora più strano è che questi numeri abbiano l'importante qualifica di "invarianti proiettivi". Cioè, se prendete due foto di quattro pali del telegrafo su una strada, presi da diverse direzioni, e date i nomi A, B, C, D  ai pali, e fate uno qualunque dei rapporti,  per esempio

$$\frac{AB \times CD}{BC \times DA}$$

il risultato sarà lo stesso tanto sulle foto quanto in realtà.

Tra l'altro, potete usare la scala che volete: un cambiamento di scala moltiplica le quattro lunghezze per un numero costante, che compare quattro volte, due di sopra e due di sotto, che si

cancellano bellamente. Nel caso in fotografia, se i pali sono equidistanti, a distanza 1, costante, l'uno dall'altro, abbiamo che il rapporto

$$\frac{AB \times CD}{BC \times DA}$$

vale - in laguna: (1 x 1)/(1 x 3) = 1/3 = 0.333

Se contiamo i quadratini sulla foto vediamo che vale:

$$\frac{13.5 \times 3}{5.5 \times 22.5} = 0{,}32727 \ldots$$

che, con tutte le imperfezioni nella foto e nella misura, possiamo accettare come identico al precedente.

Incidentalmente, sapendo che uno dei rapporti vale 1/3, possiamo allegramente calcolare gli altri cinque e verificare anche loro in fotografia. Inoltre, i rapporti restano invarianti se si scelgono quattro pali qualsiasi, purché l'ordine dei calcoli nella foto e nella realtà sia lo stesso.

Una stranezza storica è che i Greci non conoscevano la prospettiva e non avevano macchine fotografiche. Tuttavia, in qualche modo, essi arrivarono a studiare questo doppio rapporto, che ha un nome speciale. Si chiama "birapporto".

## LIX. LA MATEMATICA DI CIÒ CHE MUTA.

La matematica si occupa anche di cose più complicate, cose che mutano. Qualcuna l'abbiamo già studiata, ma si trattava di cambiamenti semplici.

Altre sono più complesse:
Per esempio un sasso che cade. O il decadimento radioattivo. O il moto di un pendolo. O il moto di un pianeta. Come si fa a sapere per esempio dove sarà il sasso in caduta libera fra 10 secondi? Oppure quanto è alto il ponte se il sasso impiega 3 secondi ad arrivare al fiume?
OK, sono problemi di fisica, e questo certo non è un corso di fisica. Ma per descrivere questi fenomeni e per dare le risposte che chiediamo occorre della matematica, non c'è scampo.

Incominciamo con un problema semplice.

### 1. Decadimento radioattivo.

Sappiamo tutti ormai che esiste un fenomeno che si chiama radioattività naturale. Non si sa come funzioni, ma si sa che, dati 1000 nuclei di una specie nucleare (o nuclide) instabile, una certa frazione decade in ogni intervallo di tempo. Per esempio se abbiamo 1000 neutroni, sappiamo che il loro numero si dimezza ogni 630 secondi, perché un neutrone si trasforma (quando gli salta in testa) in un protone, un elettrone ed un antineutrino. Questi 630 secondi sono detti "tempo di dimezzamento" del neutrone.

Vediamo come avviene questo decadimento dal punto di vista matematico. Il numero di nuclei che decade in un tempo piccolo D è proporzionale al numero di nuclei che non sono ancora decaduti.

Numero che decade in D = (Costante) x (numero non ancora decaduto) x D.

É chiaro che D va preso piccolo quanto si può, perché dobbiamo poter considerare il numero di neutroni non decaduti come (quasi) costante nell'intervallo D. Se si prende un D troppo grande, i neutroni intanto decadono, il numero di superstiti cambia e la nostra approssimazione fallisce. Dire che D deve esser piccolo è un concetto vago. Per un insetto che vive un giorno, un anno è un tempo lunghissimo, quasi 400 generazioni. Invece, per la Terra, un giorno è qualche decimiliardesimo della sua età. Questo ci dà un'idea: un intervallo è piccolo per l'insetto se è piccolo rispetto alla sua vita, ed è piccolo per la Terra se è piccolo rispetto alla sua età. Noi abbiamo poco da scegliere: D va preso piccolo rispetto al tempo di dimezzamento.

La costante nella nostra formula ci dice quanto rapidamente decadono i nostri nuclei, ovvero la probabilità che un nucleo decada ogni secondo. Questa costante può anche esser vista come la percentuale di nuclei che decade in un secondo. Una costante ½ vuol dire che metà dei nuclei decade in un secondo. Ciò non vuol dire che in 10 secondi decadrà 5 volte il numero di nuclei presenti, il che è impossibile. Semplicemente, se succede qualche assurdità del genere, vuol dire che dobbiamo operare con intervalli di tempo più brevi.

Per risolvere il nostro problema procediamo a cicli di tre passi. Chiamiamo N il numero non

decaduto, D l’intervallo di tempo, DN il numero che decade in D ( DN non è un prodotto DxN, è solo il nome della variabile); poniamo la costante = K. Chiamiamo N’ il numero di superstiti dopo l’intervallo D.
1) Calcoliamo il numero che decade in D:
DN = K N D.
2) Poi calcoliamo il Numero non ancora decaduto dopo D:
N’ = N - DN
3) Ora ripetiamo il ciclo usando N’ come nuovo N.

Prendiamo all'inizio il numero iniziale =10000, la costante K= 1/100 (cioè un centesimo dei nuclei presenti decade in un secondo), e sia D=10 secondi. T è il tempo dall’inizio, cioè la somma delle D.

| Numero di nuclei presenti all’inizio di D, N | Tempo dall’inizio, t, in secondi | Numero di nuclei decaduto in 10 s: DN=(N/100)x10 | Tempo t+D | Numero rimasto N-DN, nuovo N |
|---|---|---|---|---|
| 10000 | 0 | 1000 | 10 | 9000 |
| 9000 | 10 | 900 | 20 | 8100 |
| 8100 | 20 | 810 | 30 | 7290 |
| 7290 | 30 | 729 | 40 | 6561 |
| 6561 | 40 | 656.1 | 50 | 5904.9 |
| 5904.9 | 50 | 590 | 60 | 5314.4 |
| 5314.9 | 60 | 531.5 | **70** | 4783 |
| 4783 | 70 | 478.3 | 80 | 4304.7 |
| 4304.7 | 80 | 430.5 | 90 | 3874.2 |
| 3874.2 | 90 | 387.4 | 100 | 3486.8 |

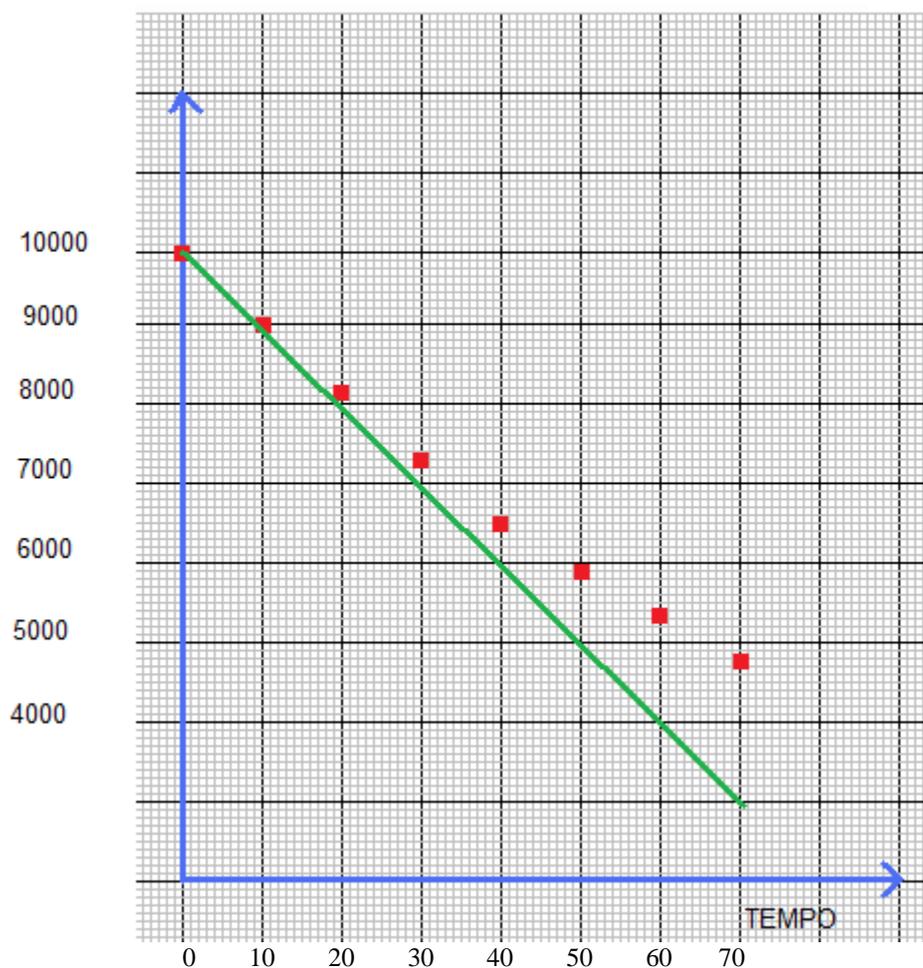
Notiamo che in settanta secondi i nostri nuclei sono decaduti per circa metà.

I primi sette passi dei calcoli qui sopra sono stati fatti a mano. Gli altri li ho fatti con il solito programma minimo per Qbasic:

***PROGRAMMA NUMERO 17 IN QBASIC: DECADIMENTO RADIOATTIVO***

```
CLS
REM Decadimento radioattivo.
N= 1000
T=0.00
INPUT “Durata del passo?”, D
INPUT“Numero di passi?”, PASSI
FOR I=1 TO PASSI
DN = N*D/100
N=N-DN
T=T + D
PRINT T,N
NEXT I
```

Io ho usato questo programma anzitutto con D =10 e PASSI = 20. Ne e è risultata la tabella data.

Supponiamo di fare un diagramma, con il tempo in ascisse e N (numero di nuclei non decaduti) in ordinate: la cosa più notevole è che i nostri punti (rossi) non cadono sulla retta (verde), ma se ne discostano. Mentre la retta arriverà a zero, noi, procedendo con il nostro metodo, non ci arriveremo mai.

Non è un risultato banale. In più, se avete un calcolatore, potete affinarlo prendendo dei D sempre più piccoli.
Se volete aumentare il numero di passi, però, io proporrei di inserire dopo l'istruzione di INPUT che chiede il numero di passi una nuova istruzione,

```
P10 = PASSI/10
```

E di sostituire l’istruzione PRINT che abbiamo  con la

```
IF I MOD P10 = 0 THEN PRINT T, N.
```

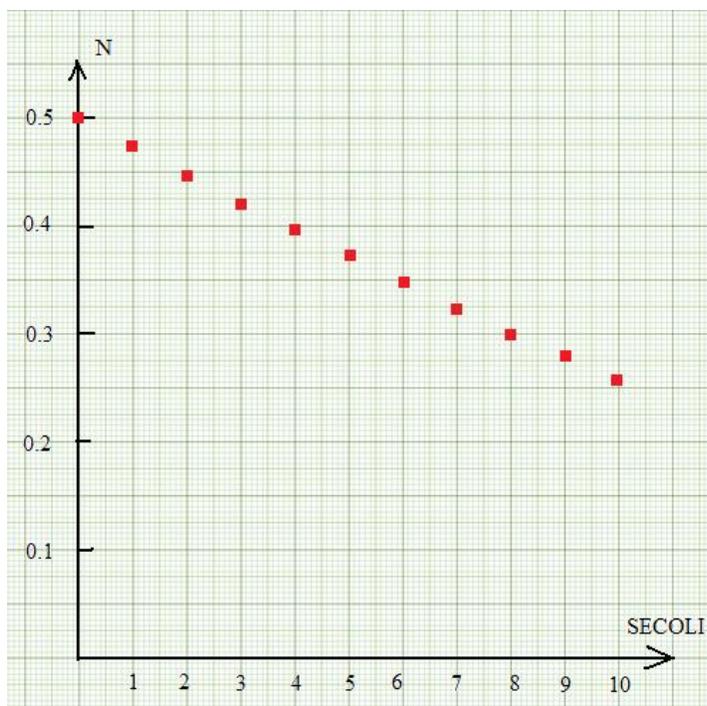
Questa istruzione stampa solo un numero limitato di volte. Se ad esempio vogliamo fare un milione di passi, questa istruzione permette la stampa solo ogni P10 volte, cioè ogni 100000 passi, cioè dieci volte in tutto.   I MOD P10 = 0 vuol dire che il resto della divisione per P10, nel nostro caso 100000 è 0.

Per quanto esistano elegantissimi sistemi di ottenere assai meglio e senza PC risultati come questo, alla fine, quando il problema è un po’ complicato, è così che si fa: grande computer, e via.

Noto anche un dettaglio. Se facciamo passi di un centesimo di secondo, cosa che per il PC fornito di programmino è banale, notiamo che occorrono circa 6931 passi per arrivare a 5000 nuclei, cioè per dimezzare il numero di partenza. Qualcuno ricorda di aver visto un numero del genere? (In realtà era 0.693147).

Adesso supponiamo di avere due tipi di nuclei. Gli uni, tipo A,  decadono. Ad esempio decade 1/10 della quantità di nuclei di quella specie, mettiamo, ogni secolo. Notate le unità: se la costante è 1/10 per secondo, D è in secondi; se è 1/10 per miliardo d’anni, D è in miliardi di anni. Gli altri nuclei, tipo B,  non decadono. Supponiamo che all’istante zero abbiamo 10000 A e 10000 B.  Il rapporto tra i due varia e ci dà una sorta di orologio. Quanto più piccolo è il rapporto tra il numero di nuclei di tipo A e quelli di tipo B, tanto più tempo è passato, come dice il diagramma, che è costruito sullo stesso programma modificato come segue:

***PROGRAMMA NUMERO 18 IN QBASIC: METODO DI DATAZIONE CON DECADIMENTO RADIOATTIVO***

```
CLS
REM DATAZIONE CON DECADIMENTO RADIOATTIVO
N= 10000
T=0.00
INPUT “Durata del passo?”, D
INPUT“Numero di passi?”, PASSI
FOR I=1 TO PASSI
DN = N*D/10
N=N-DN
T=T + D
PRINT I, D,T, N, N/(10000+N)
NEXT I
```

Se sapete che siete partiti con 10000 nuclei di tipo A e 10000 di tipo B, e ad un certo punto trovate che il rapporto fra nuclei di tipo A e il totale di nuclei presenti (A + B) è sceso da 0.5 a 0.35, vuol dire che sono passati 6 secoli.
Il metodo della **datazione a radiocarbonio,** che fruttò un Premio Nobel a Willard Libby nel 1960, è basato su questo principio. Soltanto, il rapporto di partenza fra carbonio che non decade e carbonio che decade è assai maggiore, e il radiocarbonio si dimezza in 5568 anni. Ad ogni modo il concetto è che quando una sostanza vive, sintetizza carbonio atmosferico, che è in parte carbonio stabile ("B", due specie di carbonio: $C^{12}$ e $C^{13}$) e in parte carbonio che decade ("A", cioè $C^{14}$). Quando la sostanza vivente muore, smette di sintetizzare carbonio atmosferico ed il carbonio radioattivo incomincia a scomparire.
Come potete immaginare, il rapporto tende a 0 quando tutti i nuclei "decadibili" saranno decaduti. Ma ci si arriverà solo dopo un tempo infinito. E' chiaro che per tempi molto lunghi, il metodo diventa sempre più difficile da applicare o sempre più impreciso).

Per non lasciare troppi punti in sospeso, ricordo che un nucleo è composto di un numero intero di protoni (carica positiva) e neutroni (senza carica). Il numero di protoni (numero atomico) determina le proprietà chimiche della sostanza. Un nucleo di carbonio ha sei protoni. Il numero di neutroni contribuisce a determinare le proprietà nucleari della sostanza. $C^{12}$, significa che il nucleo di questa sostanza ha sei protoni (come tutte le specie di C) e 6 neutroni. $C^{14}$ ha sempre 6 protoni, ma ha otto neutroni. La somma di protoni e neutroni è il numerino ad esponente.

## 2. Interesse composto.

Esattamente lo stesso programma, con un più al posto di un meno (N + DN invece di N - DN), ci può dire come cresce una grandezza che in una data quantità di tempo aumenta di una frazione

del totale presente.
In taluni casi, ad esempio quando vogliamo vedere come cresce un capitale messo ad interesse composto, non si può scendere a intervalli di tempo "di integrazione" D più brevi di quel che dice la banca. Se la banca vi dà 2% all'anno, non vi dà 1% ogni sei mesi.

***PROGRAMMA NUMERO 19 IN QBASIC: INTERESSE COMPOSTO***

```
CLS
REM INTERESSE COMPOSTO
N= 10000
T=0.00
INPUT "Durata del passo?", D
INPUT"Numero di passi?", PASSI
FOR I=1 TO PASSI
DN = N*D/100
N=N+DN
T=T + DT
PRINT T,N
NEXT I
```

Vediamo che succede nei due casi (2% all'anno e 1% ogni sei mesi), con un capitale iniziale di 10000 Euro (notare che bisogna anche trafficare un poco sull'istruzione verde, per distinguere i due casi).

| semestri | anni | 1% al semestre | 2% all'anno |
|---|---|---|---|
| 1 | | 10200 | |
| 2 | 1 | 10404 | 10400 |
| 3 | | 10612 | |
| 4 | 2 | 10824 | 10816 |
| 5 | | 11041 | |
| 6 | 3 | 11262 | 11249 |
| 7 | | 11487 | |
| 8 | 4 | 11717 | 11699 |
| 9 | | 12190 | |
| 10 | 5 | 12434 | 12166 |

Quindi dopo 5 anni, la differenza sarebbe di 268 euro. Per una banca che maneggia milioni di Euro, la differenza può diventare significativa.

Questo programma, che oltre al decadimento radioattivo calcola l'interesse composto, può essere utile anche per vedere quanto ci "guadagnerete" in certi affari che propongono le banche, tenendo presente che le banche non sono associazioni di beneficenza e non ci perdono mai: le loro perdite le paga il cliente.

Tuttavia, alla fine del Seicento i banchieri europei si chiesero che cosa sarebbe successo dividendo l'interesse annuo in dodici parti e assegnando un dodicesimo dell'interesse ogni mese.

Naturalmente la somma aumentò.  Per vedere che cosa scoprirono i banchieri o gli amici matematici dei banchieri (svizzeri) occorre modificare un poco il nostro programma QBasic.

***PROGRAMMA NUMERO 20 IN QBASIC: CASO LIMITE DELL'INTERESSE COMPOSTO***

```
CLS
REM INTERESSE COMPOSTO – CASO LIMITE
N#= 1.0
T#=0.00
INPUT"Numero di passi?", PASSI
Dt#=1/passi
P10=PASSI/10
FOR I=1 TO PASSI
DN# = N#*DT#
N#=N#+DN#
T#=T# + DT#
IF I MOD P10 = 0 THEN PRINT T#,N#
NEXT I
```

Il cancelletto# diviene veramente necessario solo per più di 100000 passi, per darci precisione sufficiente.  La mezza istruzione IF I MOD P10 = 10 THEN, che gli studiosi di inglese riconosceranno come "se..allora", significa che PRINT agisce solo ogni (PASSI/10) volte. Cioè, se facciamo 1 milione  di passi stampiamo solo 10 righe e non un milione.

Questo programma è un poco diverso dal precedente, perché prende come capitale 1 e si occupa soltanto di vedere che succede al totale se si dà un interesse annuo del 100% (che nessuna banca si sognerebbe di dare), dividendolo opportunamente.
Lo si può dare di schianto alla fine dell'anno ed allora il fortunato cliente ottiene un capitale 2, e 4 dopo due anni. Si può dare il cinquanta per cento del capitale ogni 5 mesi, e si ottiene 2.25 dopo un anno e 5.0625 dopo due anni. Vedendo questo sensibile aumento ai banchieri dovette venire in mente che magari aumentando il numero di passi (e dividendo in  proporzione l'interesse composto) il capitale avrebbe potuto crescere indefinitamente già alla fine del primo anno. I risultati sono espressi da questa tabella:

| Numero totale di passi in un anno | Interessse (composto) ad ogni passo | Dopo un anno | Dopo due anni |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.25 | 2.441 | 5.960 |
| 6 | 0.166 | 2.521 | 6.359 |
| 12 | 0.083 | 2.613 | 6.828 |
| 100 | 0.01 | 2.691 | 7.245 |
| 1000 | 0.001 | 2.717 | 7.382 |
| 10000 | 0.0001 | 2.7181 | 7.388 |
| 100000 | 0.00001 | 2.7182 | 7.3888 |
| 1000000 | 0.000001 | 2.718280 | 7.38905 |

Che cosa è successo? Sembrava che il capitale alla fine dell'anno crescesse allegramente, ma in realtà si è messo a crescere sempre meno, fino a raggiungere saturazione, il suo "limite". Dopo

un anno, composto a un milionesimo per cento ogni circa 30 secondi è arrivato a 2.71828, un numero ben noto ai matematici, che avremo occasione di riincontrare.

### 3. La "caduta dei gravi".

Vogliamo ora vedere come cade un sasso, che è un grave, nel senso che è soggetto alla forza di gravità.

All'inizio c'è una legge fisica, sperimentale. Se non c'è resistenza dell'aria, tutti i corpi (piume e sassi) cadono con la stessa accelerazione, che è di (circa) **dieci metri al secondo per secondo**. Ciò vuol dire che ogni secondo la loro velocità aumenta di dieci metri al secondo. Qui il problema è un po' più complesso del precedente, come vedremo nell'impostazione.

Consideriamo: percorso iniziale 0, velocità iniziale 0, tempo iniziale 0.

Dopo 1 secondo
velocità dopo 1 secondo = velocità iniziale (0) + 10 m/s
spazio percorso dopo un secondo = (velocità media, data da (0+10)/2 = 5 m/s) x tempo (=1 sec) = 5m

Dopo due secondi:
velocità 20 m/s, spazio percorso nel secondo secondo = 15 m (la velocità media è ora (10+20)/2 m/s); più spazio già percorso=20 m

Dopo 3 secondi
velocità 30 m/s, spazio percorso nel terzo secondo 25m, spazio totale 45 m.
Eccetera.

Notate che in ogni secondo noi abbiamo usato la velocità media. Per esempio all'inizio del terzo secondo la velocità è 20 m/s, alla fine è 30. Chiaramente, il sasso cadrà un po' più in fretta di 20 m/s ed un po' più lento di 30 m/s. Noi facciamo la media, cioè (20+30)/2 = 25.
Succede che con questo accorgimento la legge di caduta che troviamo è corretta, e modificando il passo non cambiamo i punto già trovati, ma soltanto inseriamo nuovi punti tra gli uni e gli altri.

Se chiedete a un fisico, vi dirà che la formula è "spazio percorso = 5 x (quadrato del tempo) e quindi avremmo dovuto trovare 5 m dopo 1 secondo, 20 m dopo 2 secondi, 45m dopo 3 secondi. Che è quel che abbiamo trovato.
Vediamo infittendo i punti, cioè vedendo quel che succede mezzo secondo per volta.

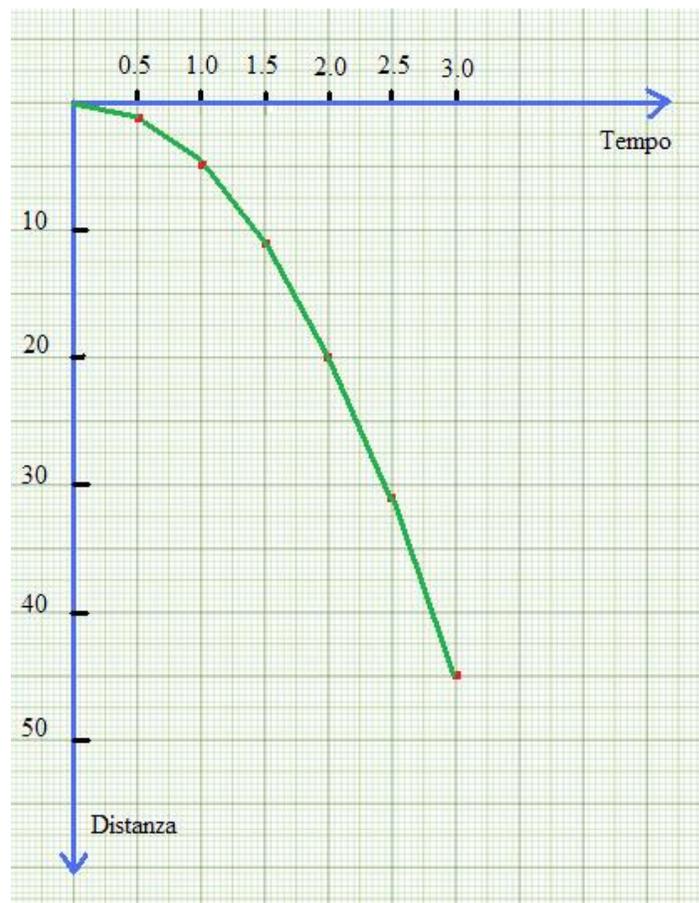
Si trova allora:

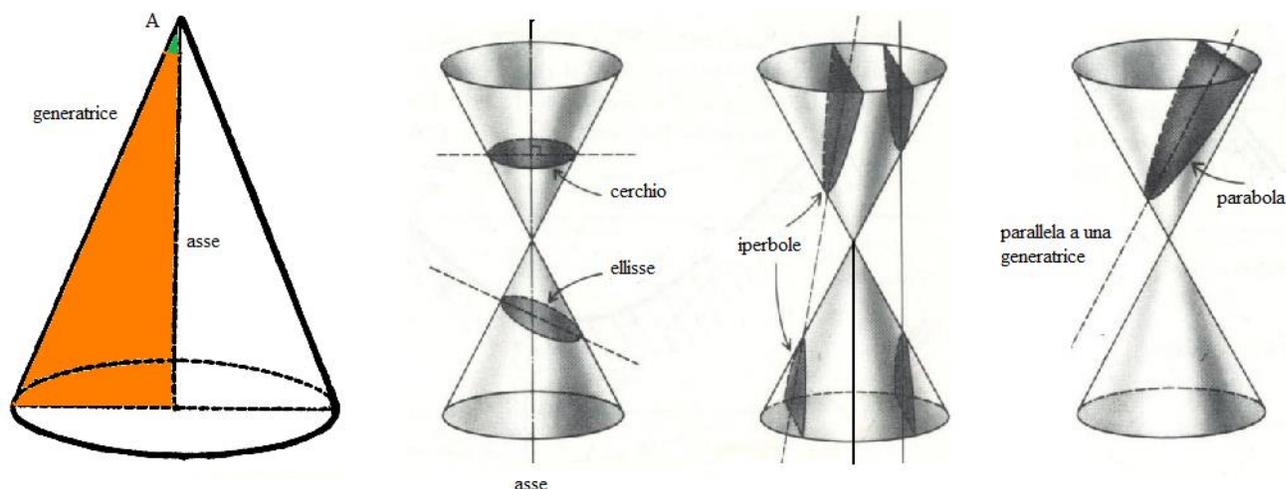
| Tempo | Velocità | Velocità media | Spazio | Risultato corretto |
|---|---|---|---|---|
| **0.5** | 5 | **0.25** | **1.25** | 1.25 |
| **1** | 10 | 7.5 | 1.25+3.75=**5** | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.5** | 15 | 12,5 | 5+6.25=**11.25** | 11.25 |
| **2** | 20 | 17.5 | 11.25+8.75=**20** | 20 |
| **2.5** | 25 | 22.5 | 20+11.25=**31.25** | 31.25 |
| **3** | 30 | 27.5 | 31.25+13.75=**45** | 45 |

Magico come tutti i numeri vadano a posto! Ciò che è più sorprendente è che col trucco della velocità media abbiamo centrato in pieno il risultato. Ciò è dovuto al fatto che effettivamente la velocità cresce uniformemente in qualsiasi intervallo di tempo, non importa quanto lungo, e la velocità media è quindi data da (velocità finale – velocità iniziale )/2.

Anche qui si può fare un diagramma, che faremo verso il basso, visto che il sasso cade. E anche qui si vede che la discesa del sasso (punti rossi) non è rappresentabile con una retta. Cioè. Certo che il sasso cade in linea retta. Ma se si usa un asse orizzontale per il tempo per comodità di disegno e di lettura, non abbiamo una retta, ma una curva che si chiama "parabola",

Potete continuare il diagramma. Assumendo che la la velocità del sasso sia inferiore alla velocità del suono nell'aria (fino a cinque secondi siamo abbastanza tranquilli), possiamo cronometrare la caduta del sasso, e, se sentiamo il tonfo a t = 2.7 s, possiamo dedurre che il ponte è alto circa 37 m. Infatti, applicando la legge fisica indicata, è 36.45.

Se ci arrestiamo a questo punto, e guardiamo la bella curva che ci è venuta, troviamo che è una curva nota fin dall'antichità. Descartes l'avrebbe subito riconosciuta dicendo: "Ma questa è una parabola!", non solo, ma avrebbe aggiunto: "Anzi, questa è la parabola $y = -5t^2$". In effetti se provate a disegnare questa curva vedete che passa esattamente per i punti rossi.

Per Descartes, una parabola generica ha la forma $y = ax^2 + bx + c$. Si tratta di una delle curve più note della matematica, dopo la retta e il cerchio. In più, è nota fin dall'antichità, come una delle tre "sezioni coniche". Il cono, come sappiamo, è una superficie che si ottiene ruotando un triangolo rettangolo intorno ad uno dei cateti, che diverrà l'asse del cono - un cono particolare, il "cono circolare retto", che a noi basta. Però i Greci (in particolare Apollonio di Perga che riassunse il sapere greco su questo soggetto 2200 anni fa) consideravano un cono doppio ("a due falde"), che si estende all'infinito dalle due parti del vertice.

Dunque l'ipotenusa girerà in tondo, e – prolungata all'infinito - sarà chiamata "retta generatrice", che forma con l'asse l'angolo A. Arrivando con una mannaia e tagliando il cono, i Greci trovarono che l'intersezione tra il cono e il piano di taglio era una curva, anzi, diverse famiglie di curve, a seconda dell'inclinazione della mannaia. Potete divertirvi a definire le condizioni del taglio per avere solo un punto, o due rette che si incrociano (dopo tutto, il nostro disegno….). Inoltre, se il piano di taglio è inclinato rispetto all'asse con angolo tra A e 90°, abbiamo una curva chiusa su una sola falda, che si chiama "ellisse". Se il taglio avviene con angolo di 90° rispetto all'asse, l'ellissi diventa un cerchio, ma è sostanzialmente sempre un'ellisse. Se il piano di taglio ha un'inclinazione tra 0° e A, otteniamo una curva in due parti separate, una per falda. Questa è la "iperbole", Infine, se eseguiamo il taglio parallelalmente ad una generatrice (angolo A con l'asse), troviamo una curva, aperta, su una sola falda, che è appunto la nostra parabola. Queste curve hanno diverse proprietà, che permisero ad Apollonio di scrivere un sostanzioso volume. Come la retta era definita da tre numeri a, b,c, che entrano nell'equazione $ay + bx + c = 0$, per Descartes una "sezione conica" o brevemente "conica", sarebbe una curva interamente definita da sei numeri a, b,c,d,e, f i quali entrano nella seguente equazione:

$$ay^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Provate a identificare a,b,c,d,e,f per la nostra parabola, e per il cerchio, che, come abbiamo detto, è una sezione conica (brevemente, “conica”) anche lui.

Ma torniamo al nostro problema. Se proprio vogliamo fare i precisini, possiamo usare la vera accelerazione di gravità, che è 9.8 metri al secondo per secondo e non dieci, e poi possiamo aggiungere il tempo che il suono del tonfo impiega a tornare a noi, alla velocità di 330 m/s.

Faremo quindi una tabella in cui avremo due scale dei tempi: il tempo di caduta vero e proprio, ed il tempo di arrivo del suono del tonfo, che aggiunge al tempo di caduta il tempo che impiega il suono ad arrivare, dato da “distanza/velocità del suono”. La velocità del suono è circa 330 m/s in condizioni normali: questo è un dato che viene bene quando volete verificare a che distanza da voi è caduto un fulmine: la luce del lampo arriva praticamente sull’istante, mentre il suono impiega il suo tempo. Si contano i secondi tra il lampo e il tuono e si moltiplica per 330. Tre secondi sono circa 1 km.

Quindi come si fa a sapere quanto è alto il ponte da cui lasciamo cadere il sasso? (veramente non dovremmo lasciar cadere sassi, perché quasi certamente passerà in quel momento un nuotatore che si piglierà il sasso in testa). Si cronometra il tempo, lo si paragona ai tempi dati nella prima colonna, e si guarda il valore dell’altezza. Il tempo effettivo di caduta è in terza colonna, e vedete che la differenza tra la prima e la terza colonna cresce.

| Tempo di arrivo del suono dal lancio, in secondi | Altezza di caduta | Tempo effettivo di caduta |
|---|---|---|
| 0.504 | 1.225 | 0.5 |
| 1.015 | 4.9 | 1 |
| 1.533 | 11.025 | 1.5 |
| 2.059 | 19.6 | 2 |
| 2.592 | 30.625 | 2.5 |
| 3.134 | 44.1 | 3 |
| 3.682 | 60.025 | 3.5 |
| 4.238 | 78.4 | 4 |
| 4.801 | 99.225 | 4.5 |
| 5.371 | 122.5 | 5 |

Un programma rudimentale per eseguire il calcolo per i primi 5 secondi di tempo di caduta, con passi di mezzo secondo, può essere:

***PROGRAMMA NUMERO 21 IN QBASIC: CADUTA DI UN SASSO DA UN PONTE***

```
CLS
REM CADUTA DI UN SASSO DA UN PONTE
FOR I = 0  TO 5  STEP 0.5
V = 9.8*I
VM=V/2
```

```
H = I*VM
T=I+H/330
PRINT  T,H,I
Next i
```

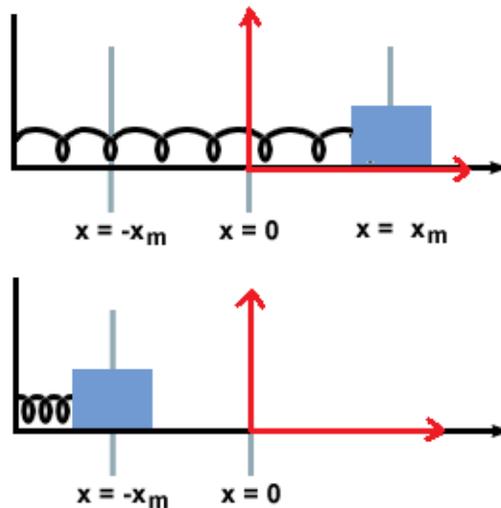
Dovremmo notare un paio di cose.
1) fino a cinque secondi l'errore fatto non calcolando il tempo di ritorno del suono è al massimo un terzo di secondo, 7% del tempo di caduta.
2) dopo 5 secondi il ponte è comunque diventato così alto che forse il suono non lo sentiamo neanche più.

Se volessimo essere ancora più precisi dovremmo notare che esiste anche la resistenza dell'aria, la quale fa in modo che la velocità di caduta non aumenti indefinitamente come nel vuoto, ma tenda a raggiungere una "velocità terminale" che dipende da molti fattori, tra cui la massa dell'oggetto (che nel vuoto non influisce sul risultato) ed un coefficiente di resistenza che dipende da come la massa è distribuita. Per esempio, per un paracadutista in caduta libera, questa velocità è di 55 m/s, quasi 200 km/ora.  Come sappiamo una tale velocità in caduta nel vuoto la si raggiunge in 55/9.8, 5.7 secondi (questo lo si ottiene sapendo che velocità =  accelerazione x tempo). In verità fino a circa tre secondi di caduta i nostri calcoli per un uomo sarebbero corretti. Poi la velocità incomincerebbe a crescere più lentamente. Per il sasso le cose cambiano, perché il suo coefficiente di resistenza è inferiore. Ad ogni modo, l'esistenza di una velocità terminale spiega perché in alcuni casi (rarissimi!) persone cadute in caduta libera da migliaia di metri si sono salvate cadendo in neve profonda o nel fango.

## 4.  "L'oscillatore armonico".

Vediamo ancora una quantità che varia in modo diverso.
Vogliamo ora vedere come funzionerebbe una molla se non ci fosse attrito. Questa molla ideale, che agisce su un pesino azzurro,  ha una posizione di riposo nel punto x=0. Qui nessuna forza agisce. Se ci spostiamo a sinistra della posizione di riposo, la molla compressa esercita una forza proporzionale alla distanza che spinge il nostro pesino azzurro verso la posizione di riposo. Se ci spostiamo a destra, la molla tesa  attira il nostro pesino  azzurro verso la posizione di riposo, con una forza che anch'essa è proporzionale alla distanza.

Scegliendo il caso numericamente più semplice, possiamo scrivere

$$Forza = -x$$

Questo segno " – " vuol solo dire che se x è positivo, la forza va nella direzione –x, cioè sinistra. Se x è negativo va verso +x, verso destra.

I fisici hanno studiato quello che succede in questo caso e Newton ha dichiarato la sua legge. Vediamo solo l'aspetto matematico: mentre nel sasso che cade abbiamo detto che la velocità varia proporzionalmente al tempo, qui la variazione di velocità è proporzionale a - x. Cioè, dopo un tempo D (che faremo bene a scegliere piccolo),

V(T + D) – v(T) = -x D

Ricordo che V(T+D) vuol dire "V quando il tempo è T + D", cioè alla fine dell'intervallo di tempo D. V(T) vuol dire "V quando il tempo è T".
Però, dato che il pesino si è spostato a destra con velocità V, in D il nostro X è diventato
X- V D.
Potremmo anche qui utilizzare nel programma una velocità intermedia tra quella all'inizio di D e quella alla fine di D. Non lo farò perché preferisco non ingombrare il programma con dettagli tecnici, ma potrete provare a farlo voi. Qui ci saranno delle approssimazioni che speriamo migliorino scegliendo D sempre più piccolo (non che questo metodo funzioni sempre).

Allora le equazioni che dovremo mettere nel nostro programma sono:
1) Quella che ci dà la velocità, cioè
V(T + D) = V(T) – x (T) D
La parentesi in V(T+D) significa: la nuova velocità al tempo (T+D)

2) E quella che ci dà la nuova posizione:
X(T+D) = X(T) + D V

Tutto è ben concatenato: la variazione della velocità dipende dalla posizione e la variazione della posizione dipende dalla velocità.

Possiamo naturalmente organizzare i nostri calcoli per farli a mano.
Per esempio facciamo una tabella del genere di

PASSI= (quel che vogliamo, noi seguiremo solo i primi ); T=0 ; D = 0.1; $x_m$=1

| T | X(T) | V(T) | X(T+D) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0.1 | 1 | 0 – (1.0)(0.10) = - 0.10 | 1 – (0.10)( 0.10) = 0.990 |
| 0.2 | 0.990 | - 0.10- (0.10)(0.99) = - 0.20 | 0.990-(0.1 )(0.20) = 0.97 |
| 0.3 | 0.97 | -0.20 –(0.10)(0.97) = - 0.297 | 0.97 – (0.1)(0.297) = 0.9403 |

***PROGRAMMA NUMERO 22 IN QBASIC: OSCILLATORE ARMONICO***

```
CLS
REM OSCILLATORE ARMONICO
X = 1
V = 0
T = 0
INPUT "Numero passi? ", PASSI
INPUT "Incremento temporale? ", D
FOR I = 0 TO PASSI
X = X + D*VM
V = V - D*X
PRINT T, V, X
T=T+D
NEXT I
```

I risultati possono essere classificati in tabella. Riporto i valori di X per T che varia da 1 a 20. L'intervallo è di 0.1. Però nella seconda colonna l'incremento temporale è 0.1 ed i passi sono 20, nella terza colonna l'incremento è 0.01 e i passi sono 200, ma io stampo un risultato ogni 10, nella quarta colonna l'intervallo è 0.0001, i passi sono 20000, e ne stampo uno ogni 1000. Questo viene fatto, al solito, premettendo una condizione all'istruzione PRINT, cioè, "Se I mod 10 =0 allora stampa", "Se I mod 1000 =0, allora stampa". Ricordo che I mod 10 = 0 vuol dire "se il resto della divisione di I per 10 è uguale a 0", cioè se I è un multiplo di 10, eccetera.
La quinta è la colonna misteriosa, ottenuta moltiplicando T per ($360/2\pi$). Chissà perché.

| T | PASSI=20 | PASSI = 200 | PASSI = 20000 | ? |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.00 |
| 0.1 | 0.99 | 0.995 | 0.995 | 5.73 |
| 0.2 | 0.97 | 0.979 | 0.980 | 11.5 |
| 0.3 | 0.94 | 0.954 | 0.955 | 17.2 |
| 0.4 | 0.90 | 0.919 | 0.921 | 22.9 |
| 0.5 | 0.85 | 0.875 | 0.877 | 28.6 |
| 0.6 | 0.80 | 0.822 | 0.825 | 34.4 |
| 0.7 | 0.73 | 0.762 | 0.765 | 40.1 |
| 0.8 | 0.66 | 0.693 | 0.697 | 45.8 |
| 0.9 | 0.58 | 0.618 | 0.622 | 51.6 |

| **1.0** | **0.50** | **0.536** | **0.540** | **57.3** |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 0.41 | 0.449 | 0.453 | 63.0 |
| 1.2 | 0.31 | 0.358 | 0.362 | 68.8 |
| 1.3 | 0.22 | 0.263 | 0.267 | 74.5 |
| 1.4 | 0.12 | 0.165 | 0.170 | 80.2 |
| **1.5** | **0.02** | **0.066** | **0.070** | **85.9** |
| **1.6** | **-0.08** | **- 0.034** | **-0.029** | **91.7** |
| 1.7 | -0.18 | - 0.134 | -0.129 | 97.4 |
| 1.8 | -0.28 | - 0.232 | -0.227 | 103.0 |
| 1.9 | -0.37 | - 0.328 | -0.323 | 109. |
| 2.0 | -0.46 | - 0.420 | -0.416 | 115. |

Con dei metodi solo lievemente più sofisticati di calcolo (dovremmo dire "di integrazione"), usando la velocità intermedia, in venti passi si può ottenere quasi la precisione che col nostro metodo (che è il più rozzo possibile) otteniamo in 20000 passi. Il vantaggio è che, organizzando i calcoli, 20 passi si fanno a mano, mentre per 20000 ci vuole almeno un PC, che peraltro se la cava in pochi secondi.

Resta solo da interpretare l'ultima colonna, quella del punto interrogativo. Se non l'avete capito da soli e siete pronti per una sorpresa, posso dire che l'ultima colonna è in gradi, se consideriamo che la prima sia in radianti. Sappiamo che 1 radiante = 57.296 gradi (qui è 57.3). Sappiamo che cosA, vale zero quando A vale 90 gradi e difatti qui vediamo che il segno di cosA cambia segno tra 85.9 e 91.7 in ultima colonna, da cui si deduce che tra questi due valori c'è uno zero. Se con Google, o tavole trigonometriche, o calcolatrici elettroniche, o con QBasic cerchiamo i valori di cosA dove A è uno degli angoli dell'ultima colonna, vediamo che i risultati sono corretti. Ad esempio cos(17.2°) è effettivamente 0.955, cos(57,3°) è 0.540 e cos(85.9°) è 0.071, in accordo con la quarta colonna.

Quindi abbiamo trovato che:

Distanza dall'origine = coseno (tempo trascorso)

Questo sistema fisico, con una molla e un peso, ha dunque prodotto qualcosa che conoscevamo già. Ci ha anzi permesso di ricavare i valori di cosA senza passare per diagrammi o altro. Ma notate, non abbiamo messo nessuna costante, non abbiamo messo né π né speciali unità di misura (li abbiamo messi solo nell'ultima colonna per interpretare i risultati). E ci è venuto fuori il coseno dell'angolo espresso in radianti. Quindi hanno ragione i matematici a dire che questa unità di misura degli angoli, per stramba che possa sembrare, è l'unica naturale.

Naturalmente, se continuassimo i calcoli, vedremmo che il la posizione X del nostro peso decresce fino a X = - 1 , punto in cui la forza di richiamo prevale e fa tornare indietro il pesino. Se non c'è attrito, dopo $T = 2\pi$ il pesino ritornerà al punto di partenza, pronto a ripetere il ciclo, infinite volte.
Aggiungo che questo sistema fisico, detto "Oscillatore Armonico", è il sistema più studiato in fisica, dalla fisica elementare a quella più avanzata, forse perché in pratica è l'unico che si possa pienamente risolvere.

**5. Un’altra costante “naturale”.**

Nessuno ci vieta di provare ad inserire altre leggi nelle nostre equazioni numeriche. Finora abbiamo visto nei nostri programmi QBasic le “istruzioni chiave” sono come segue:

| **Quantità che varia** | **Instruzione/i chiave in QBasic** | **Commento** |
|---|---|---|
| Numero N di nuclei che decadono | Variazione di N = - N *D/100 | Una istruzione chiave.<br>Equazione del primo ordine.<br>Soluzione: $N = N_0 e^{-kt}$ |
| Capitale N investito ad interesse composto | Variazione di N= + N*D/10 | Una istruzione chiave.<br>Equazione del primo ordine.<br>Soluzione: $N = N_0 e^{kt}$ |
| Sasso che cade | Velocità = 9.8 * tempo<br>Spazio: velocità media * tempo | Due istruzioni chiave.<br>Equazione del secondo ordine.<br>Soluzione: $y = -at^2$ |
| Oscillatore armonico | X = X + D*(Velocità media)<br>V = V - D*X | Due istruzioni chiave.<br>Equazione del secondo ordine.<br>Soluzione: x = cos(t) |
| Nuova equazione | Variazione di Y = D/X | Una istruzione chiave |

In questa tabella D è la lunghezza di ogni passo.

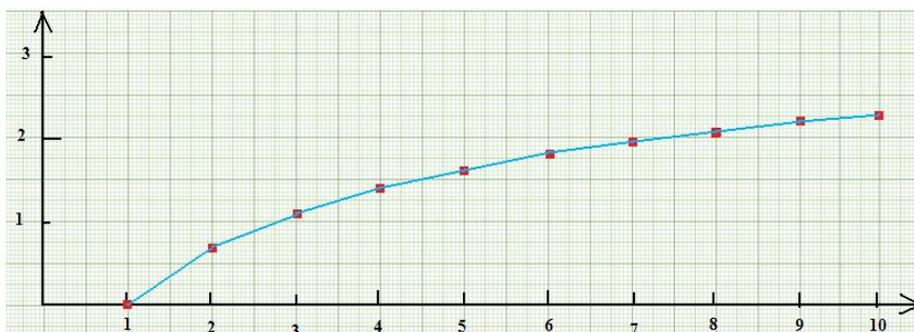
La “Nuova equazione “ è semplicissima e non vi compaiono costanti numeriche che piovono dal cielo.
Il programma per la soluzione è:

***PROGRAMMA NUMERO 23 IN QBASIC: NUOVA EQUAZIONE***

```
CLS
REM “NUOVA EQUAZIONE”
Y = 0
X = 1
INPUT “Lunghezza di ogni passo? “, D
INPUT “Numero passi? “, PASSI
FOR I = 1 TO PASSI
DY =D/X
Y = Y+DY
X=X+D
MO=1/D
IF I MOD MO =0 THEN PRINT X, Y
NEXT I
```

Visto che siamo alla fine del capitolo, andiamo giù decisi. Prendiamo passi brevissimi, 0.0001, facciamo 100000 passi e stampiamo un risultato ogni 10000 risultati. Troviamo:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 0.0000 |
| **2** | **0.6931** |
| 3 | 1.0987 |
| 4 | 1.3865 |
| **5** | **1.6097** |
| 6 | 1.7920 |
| 7 | 1.9461 |
| 8 | 2.0796 |
| 9 | 2.1973 |
| **10** | **2.3026** |

Magari facciamo anche un diagramma, chissà che non ci serva in seguito.

E questa volta, con una legge così semplice, che cosa abbiamo trovato?
Al numero 2 corrisponde 0.6931, che, come avevo detto, è il numero che trovate su QBasic se chiedete "Print log(2)". Ma sappiamo che log(2) = 0.3010, in base 10, anche perché lo abbiamo laboriosamente calcolato in vari modi. Che non abbiamo per caso trovato degli altri logaritmi?
Se così fosse, al prodotto "2 x 5" dovrebbe corrispondere la somma di 0.6931 e 1.6097. Ci viene 2.3028, che infatti differisce per una parte su diecimila dal valore 2.3026 che troviamo in corrispondenza di 10. Ma allora possiamo pensare che dividendo tutti i numeri della colonna y per 2.3026 troveremmo i logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10. E così è.
Ad esempio 1.0987/2.3026 =0.47716, mentre il logaritmo decimale di 3 è 0.47712.
Ma allora 10 = $b^{2.3026}$, dove b è la base misteriosa che vorremmo conoscere. Come si fa a trovare b? Intanto b = $10^{1/2.3026}$ = $10^{0.4343}$. Se andiamo a guardare la tabella delle potenze di 1.01, vediamo che 10 corrisponde ad un esponente circa 24.2.
Ora abbiamo la semplice proporzione

$$\frac{0.4343}{10} = \frac{\log(b)}{24.2}$$

Da cui viene che log(b) corrisponde all'esponente 10.51 in base 1.01. Andando a cercare qual numero corrisponde a questo esponente, sempre in base 1.01, troviamo che è circa 2.72.
Per fare i conti bene con le radici quadrate di 10 basta pensare che noi vogliamo $10^{0.4343.}$

0.4343 deve diventare la somma di esponenti della seconda colonna, magari moltiplicati per numeri interi, altrimenti siamo da capo.

| Potenza di 10 Successive radici quadrate | Potenza di 10. Valore decimale dell'esponente | Valore |
|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 10.0 |
| 1/2 | 0.5 | 3.162278 |
| 1/4 | 0.25 | 1.778279 |
| 1/8 | 0.125 | 1.333521 |
| 1/16 | 0.0625 | 1.154782 |
| 1/32 | 0.03125 | 1.074608 |
| 1/64 | 0.015625 | 1.036633 |
| 1/128 | 0.0078125 | 1.018151 |
| 1/256 | 0.00390625 | 1.009035 |

Abbiamo allora che il primo esponente è **0.250**. Ci resta 0.4343-0.250 = 0.1843. Nella seconda colonna vediamo che **0.125** è più piccolo. Ci resta 0.0593. Potremmo provare a mettere, per eccesso, **0.0625**, che è un po' più grande. La nostra base misteriosa diventa così un po' più piccola di 1.7783 1.334 1.154 = 2.7375. Avevamo usato 0.0625 che è maggiore di 0.0593 di 0.0032 che è l'ultimo esponente in tabella. Quindi ora dobbiamo dividere per 0.009 da cui risulta b > 2.7131.
Non possiamo far molto meglio, perché già partiamo da un valore approssimato, con solo 4 cifre decimali. Cercando sulle tavole, o su Google, o su Qbasic troveremmo che in realtà

$$b = 2.71828182845 \ldots$$

Questa costante, che viene chiamata ovunque "*e*", è in matematica la seconda costante in ordine d'importanza dopo il $\pi$ e anche lei ha infinite cifre decimali senza esser periodica. Inoltre, l'abbiamo incontrata nel calcolo dell'interesse composto. E' la base "naturale" dei logaritmi, perché con l'equazione più semplice possibile quelli che otteniamo sono i logaritmi in base *e*, così come cosA ci veniva dall'equazione più semplice possibile a condizione che A fosse misurato in unità naturali, cioè in radianti. Tenete dunque presente che per trovare i logaritmi "naturali", quelli che la natura ci darebbe sempre anche se invece di dieci dita nelle due mani ne avessimo otto come Paperino, bisogna semplicemente moltiplicare i logaritmi decimali per 2.3025893….

A quelli a cui piace fare calcoli, e desiderano calcolare abbastanza rapidamente tanto la costante *e* quanto le potenze quali $e^x$ dirò che possono divertirsi ad usare la "serie esponenziale". Questa dice in generale che:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < \infty$$

Se mettete x=1 trovate, ovviamente, *e* stesso. Dato che il fattoriale cresce rapidamente, in pochi termini si trovano risultati accettabili.

Il solito rozzissimo programmino in QBasic è:
***PROGRAMMA NUMERO 24 IN QBASIC: CALCOLO DI EXP(X)- NUMERICO***

```
CLS
REM CALCOLO DI EXP(X)
INPUT “x? “,X
PRINT “Calcolo di exp(x)”
PASSI = 25
EX# = 1
D = 1
NADX = 1
DADX = 1
FOR I = 1 to PASSI
NADX = NADX * X
DADX=DADX*I
ADX# = NADX/DADX
EX#=EX# + ADX#
PRINT  I, EX#
NEXT I
```

In questo programma l'istruzione INPUT vi chiede di scegliere la x per cui volete calcolare exp(x), che è solo un altro modo di scrivere $e^x$. Il ciclo "FOR …NEXT" (in verde) calcola uno per volta i nuovi termini da aggiungersi ai risultati parziali di $e^x$ già trovati. In pratica, calcola un nuovo numeratore (NADX), un nuovo denominatore (DADX) ed il loro rapporto ADX, che è il nuovo termine da aggiungere.
Il cancelletto in EX# e altre variabili significa che vogliamo doppia precisione, in questo caso 15 cifre. I PASSI sono 20, ma potete aumentare o diminuire il loro numero a piacere.
Se chiedete la costante $e^1$ , in dieci passi già ottenete 7 cifre decimali. Più veloce ancora è $e^{0.5}$, che vi dà 9 cifre decimali in 9 passi. Invece $e^{6.3}$ vi dà 6 cifre corrette in 24 passi. Vediamo cioè che c'è una competizione fra numeratore e denominatore dei successivi termini della serie per $e^x$, la "serie esponenziale". Quanto più piccolo è il valore di questa frazione, tanto più piccolo è il termine da aggiungere. Il denominatore cresce rapidamente oltre ogni potenza di x. Tuttavia, ciò richiede più passi se x stesso, che sta al numeratore, è grande.

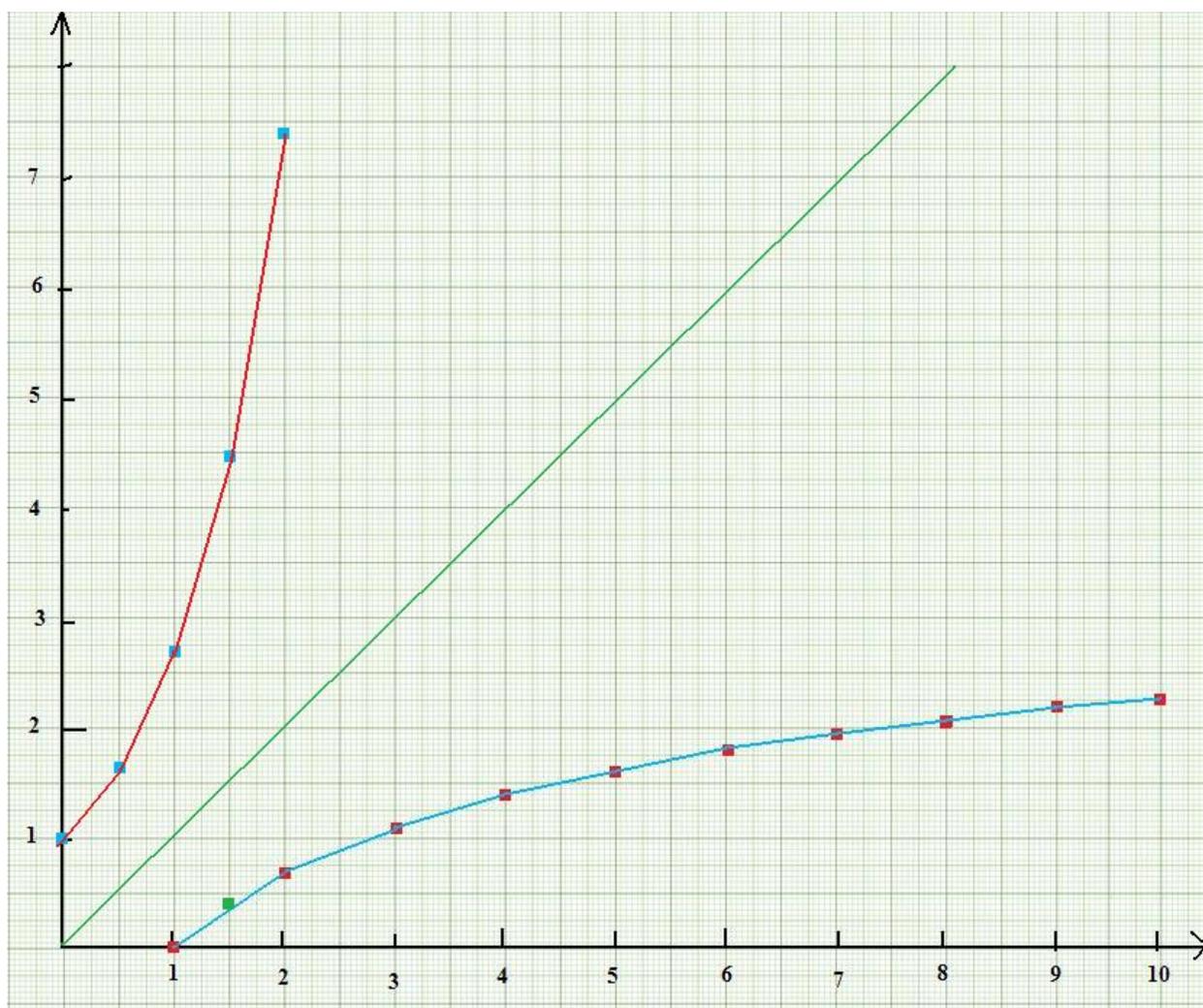
Calcoliamo exp(x) con x che varia da 0 a 3 con passi di 0.5, cosa che, con la ricetta data più sopra, si può fare abbastanza in fretta a mano. Tuttavia, per fare ancora più in fretta, sfruttiamo il fatto che QBasic sa calcolare da solo $e^x$, se solo gli si chiede EXP(X). E' un po' come guardare su una tavola: qualcuno ha fatto i conti, e noi cerchiamo il risultato. Quindi il programma diventa banale:

***PROGRAMMA NUMERO 25 IN QBASIC: TAVOLA DI EXP(X)***

```
CLS
REM TAVOLA DI EXP(X)
FOR X=0 TO 10 STEP 0.5
PRINT X, EXP(X)
NEXT X
```

E mettiamo in tabella i risultati:

| x | Exp(x) |
|---|---|
| 0 | 1.0 |
| 0.5 | 1.649 |
| 1.0 | 2.718 |
| 1.5 | 4.482 |
| 2.0 | 7.389 |
| 2.5 | 12.182 |
| 3.0 | 20.085 |

Siamo andati solo fino a x=3, perché, come vedete, exp(x) cresce molto in fretta e noi vogliamo fare un grafico doppio, in cui riproduciamo anche il grafico di quelli che sappiamo essere i logaritmi naturali ed a cui aggiungiamo i punti della tabella qui sopra.

Non credo che possa sfuggire la simmetria del diagramma, anche se disegnato con molta imprecisione. La linea azzurra che unisce i punti rossi diventa la linea rossa con punti azzurri se noi scambiamo gli assi, o, se preferite, riflettiamo il diagramma  usando la linea verde, la bisettrice, come asse.  Questo avviene tutte le volte che le funzioni sono una l'inverso dell'altra. **Inverso, si noti bene, non nel senso di x e 1/x, ma nel senso di esprimere la funzione y(x) come x(y).**

Nella "Nuova equazione" la (variazione di Y) = (variazione di X)/X. Nell'equazione dell'interesse composto avevamo che la (variazione di Y) = (Variazione di X) Y, cioè (Variazione di X)= (Variazione di Y)/Y. Scambiando X ed Y l'equazione è la stessa che ha prodotto i logaritmi naturali.

In un caso abbiamo $y = e^x$, ma questo vuol dire che  $x = \log_e(y)$. Questa è la funzione inversa. Invece, per esempio, la funzione inversa di y = x  è   x = y.

E con questo avete un'idea di cosa sono alcune  "equazioni differenziali" (hanno a che fare con "differenze" di qualche sorta) e le avete anche risolte, anche se solo "numericamente". Ma niente paura, alla fine quello che conta nei problemi pratici sono sempre solo i numeri.

## LX.  DUE PIÙ DUE PUÒ ANCHE NON FARE QUATTRO

(E ALTRE STRAMBERIE).

Dunque per i commercianti bisogna che la matematica provveda un metodo per tenere conto delle merci, gli incassi, le spese eccetera; i banchieri vogliono calcolare interessi, redditi, ammortizzazioni; per gli ingegneri la matematica deve aiutarli a costruire tunnel, ponti, centrali elettriche, grattacieli.

Fin qui tutto quello che abbiamo imparato più sopra va benissimo per far contenti commercianti, banchieri e ingegneri.  Ma ci sono altre esigenze. Per esempio quelle dei fisici. Lì, la matematica di cui ho dato un quadro non basta più .

Per esempio noi conosciamo due operazioni fondamentali (addizione e moltiplicazione), e le loro operazioni inverse, sottrazione e divisioni. Inverse, perché la sottrazione disfa quello che fa l'addizione e la divisione disfa quello che fa la moltiplicazione.
Ma adesso, invece di vedere quello che fanno le operazioni ai numeri (come 2+2 fa 4) vediamo qual è il meccanismo, per esempio della moltiplicazione.

Il meccanismo delle operazioni è in due parti:
- su che cosa operano le operazioni;
- come operano le operazioni.
Per esempio 2+2 = 4. Qui si sente sempre dire “Se la matematica non è un’opinione, due più due fa quattro”. Ma è proprio vero?
Per esempio due oche più due galline fa sempre due oche più due galline.
Quindi l'addizione come la conosciamo opera su numeri, non su animali. Prima dobbiamo tradurre gli animali in numeri, e poi si può sommare.
E poi i numeri possono comportarsi in vario modo. Per esempio, possono essere scritti in basi diverse. Ma chi ha detto che i numeri debbano essere i soli oggetti possibili su cui operano le operazioni matematiche?

Per sapere come le operazioni operano sugli oggetti nel gioco che noi vogliamo inventare, bisogna dare una tabella per ogni operazione.  Per stramba che possiamo costruire la nostra tabella, per esempio di addizione, molto probabilmente un matematico l’ha già studiata, soprattutto se dà dei risultati interessanti.

Vediamo per esempio la seguente tabella di addizione, che dà la somma dei resti della divisione per tre, che più elegantemente potremmo chiamare “tabella di addizione modulo 3”. Cioè , è chiaro che 2+2 farebbe 4, ma dobbiamo prendere il resto della divisione di 4 per 3, ed il resto è uno. Invece 2+1 = 3, ma di nuovo dobbiamo dividere per 3, e troviamo resto 0.

|   | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

Gli **oggetti** su cui questa operazione agisce sono i numeri naturali 0, 1, 2 ed il **modo** in cui agisce è dato dalla tabella.

Abbiamo usato senza accorgercene una tabella di questo genere quando volevamo trovare il giorno della settimana di una certa data. Allora però dividevamo per sette, cioè prendevamo resti della divisione per sette. Ecco la tabella che implicitamente usavamo. Completatela.

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |

Tanto per mostrare che non tutto è ovvio, notate la tabella di moltiplicazione, non addizione, dei resti della divisione per cinque. La si costruisce facendo il prodotto dei due numeri, in testa alla riga e in testa alla colonna e scrivendo il resto della divisione per cinque del risultato. Per esempio 4 x 4 =16, diviso 5= 3 con resto 1, scrivo 1 nella tabella

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

vediamo ora la stessa tabella, ma con i resti della divisione per 6.

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| 5 | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

La tabellina con i resti della divisione per sei è dunque più strana: ci sono degli zeri nel mezzo della tabella, e le cifre appaiono in modo più capriccioso (che non manca di una certa eleganza), mentre quelle dei resti della divisione per sette appaiono sempre tutte in ogni riga e colonna .

Il fatto che 4 x 3 = 0 dà un'idea di quali stranezze si possano trovare in matematica. Nella nostra normale aritmetica se il prodotto di due numeri dà zero vuol dire che uno dei due è zero. Qui invece no. Sono comparsi i temuti “divisori dello zero”.

Che cosa abbiamo imparato fin qui? Qualche gioco che può essere utile ogni tanto, e poi, guardando la tabellina dei resti della divisione per 3, che 2+2 non fa sempre, assolutamente 4, ma può anche fare 1.
Ma allora, perché diciamo che 2+2 fa 4? Perché finché addizioniamo dita di una mano, euro, o

oggetti o altro, la tabella che tutti conosciamo  secondo cui 2+2 = 4 ci dà il risultato che otteniamo contando sulle dita. Invece la tabella dei resti della divisione per sette ci serve in un numero molto minore di casi, per esempio quando vogliamo sapere il giorno della settimana di una certa data.  Oppure  la tabella dei resti della divisione per 12 ci aiuta a risolvere il problema:”sono le cinque, che ora indicherà l’orologio tra 11 ore?”.

D'altra parte, che 2+2 non faccia 4 lo sapevamo anche dalla tabella di addizione base 3.
Lì avevamo:

|   | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 2 | 10 | 11 |

Cioè 2+2=11

Ma c’è una differenza. Qui 2+2 non fa 4 semplicemente perché scriviamo 4 in un modo diverso. Nei resti della divisione per 3, invece, 4 proprio non esiste. Non ci sono numeri che divisi per tre diano resto quattro, semplicemente perché i resti devono essere tutti più piccoli di tre.

Per quanto complicate siano le tabelle, notiamo che 2+3 fa 5 (o, in base 3, fa 12) esattamente come 3+2.

Ma chi ci obbliga a giocare ad un gioco in cui 2+3 = 3+2?  o  2 x3 = 3 x 2?
Qui, come vedete,  stiamo proprio esplorando il meccanismo delle operazioni.

**Ci  sono dei casi in cui abbiamo degli oggetti  e delle operazioni per cui non è vero che l'operazione di A su B dia lo stesso risultato che l'operazione di B su A e quindi l’addizione (o moltiplicazione) come noi l’abbiamo imparata dà i risultati sbagliati.**

A questo punto  vorrei insegnare una volta per tutte una nuova operazione, anzi un nuovo calcolo,  che può rappresentare le operazioni più strane. Non è banale, anche se l’operazione non è complicata come l'estrazione di una radice quadrata. Si chiama moltiplicazione di matrici. Dunque gli oggetti con cui abbiamo a che fare si chiameranno matrici.

Che cosa sono le matrici?

Semplicemente delle tabelle, che per noi  avranno sempre un ugual numero di righe e di colonne con una sola eccezione (anche se si potrebbe essere più generali).  Le chiameremo matrici 2 x 2 , 3 x 3, 4 x 4 eccetera. Una matrice  1 x 1 ha una riga ed una colonna, e quindi è un numero isolato. Quello  che avrà di buono il prodotto di matrici è che include anche il caso del prodotto

di due numeri ordinari.
L'eccezione che avevo menzionato è che considereremo anche matrici costituite da una sola colonna di  elementi:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

I vari oggetti che compaiono in ogni casella sono gli “elementi” di matrice.

Per quanto riguarda le quattro operazioni, dico subito che in quanto segue non ci occuperemo della divisione di matrici, la quale è comunque possibile. Semplicemente, non ci servirà. Non utilizzeremo neppure addizione e sottrazione, ma non sono niente di speciale: si esegue l’addizione elemento per elemento.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{pmatrix}$$

e  la sottrazione allo stesso modo.
Il divertimento arriva quando si parla di prodotto:
Adesso attenti, perché la regola è complicata e ci si confondono anche barbuti professori.
Regola del prodotto di matrici, per esempio 2 x2:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{w} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

La regola, evidentemente, deve permetterci di calcolare   x,y,w,z.

Ricetta:
Affettare la prima matrice in due fette orizzontali e la seconda in due fette verticali.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \hline c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \end{array}\right)$$

Quindi ottenere il risultato eseguendo le seguenti operazioni “riga per colonna”:

- x  =  a  A  +  b  C: cioè primo elemento della prima riga della colonna di sinistra per il primo elemento della prima colonna della matrice di destra  **a cui si somma** il prodotto del secondo elemento della prima riga della matrice di sinistra per il secondo elemento della prima colonna della matrice di destra.

- y  =  a  B  +  b  D
- w =  c  A  +  d   C
- z  =  c  B  +  d   D

Ancora una volta, non c’è nessuna ragione perché la regola sia così. E’ così perché viene bene così.
Però la regola è più complicata a descriversi che a mettersi in pratica.
Ma perché una regola così complicata?  Semplicemente perché per certi giochi serve.

Facciamo un esempio: si supponga che
x= au + bv,   y = cu + dv.
Se volete essere un po' pomposi direte che queste due equazioni costituiscono una "sostituzione lineare".
Poi supponiamo che a loro volta
u=AU+BV, v=CU+DV.
Ora vogliamo scrivere x e y in termini di U e V, saltando le u e v.
Allora x = a(AU+BV)+b(CU+DV) =raccogliendo le U e le V = **(aA+bC)** U **+ (aB+bD)** V
Lascio che chi vuole faccia le medesime sostituzioni per trovare anche y in termini di U e V.
Oh meraviglia! Ritroviamo i nostri quattro prodotti. Perché?

Notate che applicando la regola complicata che ho appena dato, al prodotto di due matrici di una riga ed una colonna, per esempio

(a) x (b)   troviamo ancora (ab).

Infatti il primo - ed unico - elemento della prima riga della prima colonna del risultato è dato dalla somma del primo e unico elemento della prima riga della matrice di sinistra per il primo e unico elemento della prima colonna della matrice di destra.
Questa osservazione può probabilmente aiutare a metter il cuore in pace a quelli che incominciano ad agitarsi dicendo:"Ma qui si parla di moltiplicazioni. Che razza di moltiplicazioni sono?". La risposta è – o può essere – che qui stiamo studiando una nuova moltiplicazione che include ed estende, ma non contraddice, il vecchio concetto di moltiplicazione.

Potete divertirvi a creare matrici complicate e moltiplicarle. Potete anche immaginare quale deve essere la regola per matrici 3x3. Noi ci accontenteremo di matrici semplici. Per esempio:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

E adesso proviamo a moltiplicare in ordine inverso

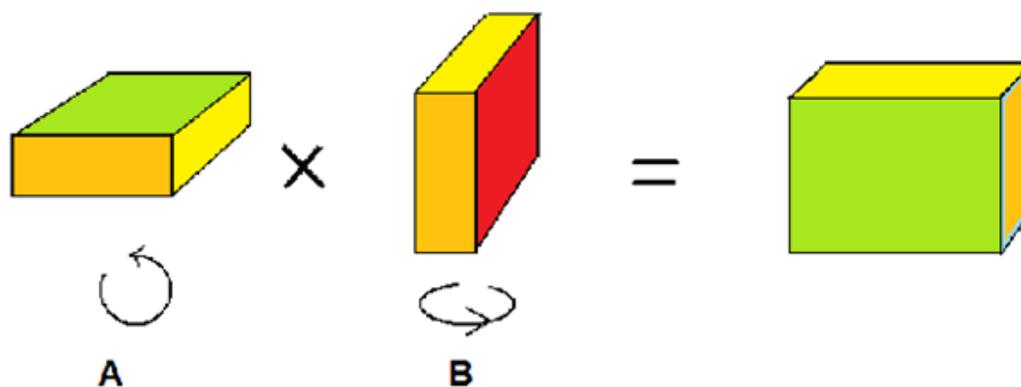
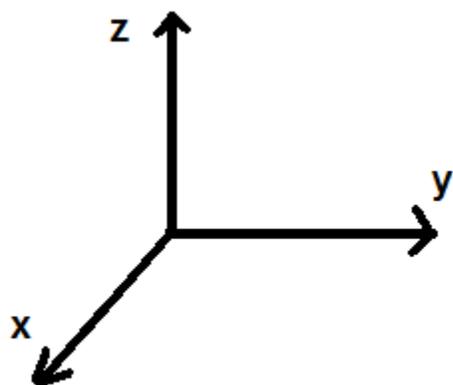
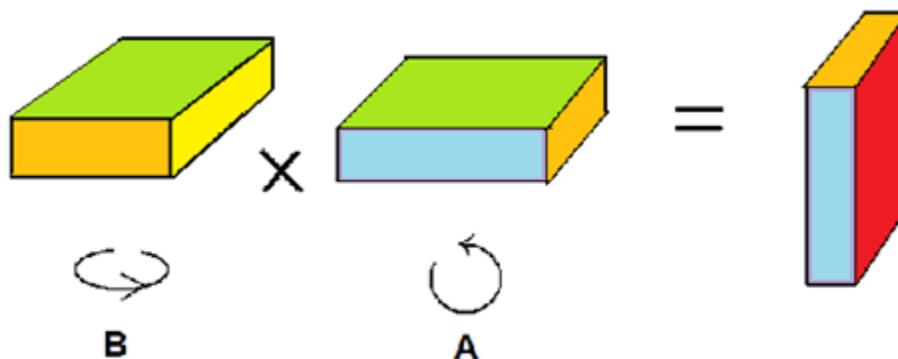
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Qui insomma era tutto il succo dell'esercizio. I due risultati sono diversi.
A x B non è uguale a B x A.

Ci sono tre classi di studenti di matematica. Quelli che dicono: "E a me che me ne...?" e si dedicano ad altro pensando di aver perso il proprio tempo (sono di norma la maggioranza). Poi ci sono quelli che dicono: "Ah che bello! Adesso mi metto a giocare con le matrici". Poi si vanno a cercare dei libri o delle pagine su Internet sul soggetto e divengono dei maghi. E infine ci sono quelli che dicono: ma tutto ciò serve a qualcosa?

Ai primi non c'è niente da dire. Ai secondi si può solo dire "Complimenti!". Ora rispondiamo al terzo gruppo.
Prendete un parallelepipedo, per esempio un libro abbastanza spesso. Notate che facce opposte

hanno colori complementari, quindi rosso-verde, giallo-viola, arancione-azzurro.

Ruotatelo di novanta gradi (in senso antiorario) intorno all’asse x (fisso).
Ruotatelo ora di 90 gradi (antiorari) intorno all’asse z (fisso anche lui).
Vi trovate con un libro orientato come in figura

Prendete un libro identico.
Ruotatelo prima di 90 gradi intorno all’asse z e poi di 90 gradi intorno all’asse x, e vi trovate con un libro orientato come in figura.

Le due orientazioni sono diverse. Non lo dimostreremo qui, ma ci sono delle matrici 3 x 3 (o addirittura 2x2) che possono rappresentare benissimo queste rotazioni. Vedremo invece più avanti un caso simile nel piano.
Ad ogni modo qui vediamo che A x B non è eguale a B x A .
Inoltre vi chiedo di credere che identificando le operazioni di rotazione con opportune matrici possiamo trovare il risultato di due rotazioni.

Eseguiamo ora il prodotto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

il risultato è la colonna

$$\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

Che cosa è successo? abbiamo semplicemente scambiato di posto gli oggetti a,b,c. Abbiamo fatto una permutazione. C'è da restare sorpresi: prendiamo tre oggetti in un certo ordine (una scarpa, un'oca e una rosa), scambiamo di posto i primi due ottenendo (oca, scarpa, rosa),

la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

moltiplicata per

$$\begin{pmatrix} \text{scarpa} \\ \text{oca} \\ \text{rosa} \end{pmatrix}$$

Ci dà

$$\begin{pmatrix} \text{oca} \\ \text{scarpa} \\ \text{rosa} \end{pmatrix}$$

proprio come se avessimo spostato gli oggetti colle nostre mani.

Visto che siamo arrivati fin qui, operiamo con un'altra matrice sulla colonna che abbiamo ottenuto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e otteniamo

Interessante, avremmo anche potuto fare prima il prodotto delle due matrici quadrate e poi operare sulla colonna, invece che operare prima con una matrice, trovare una nuova colonna, e poi operare con un'altra matrice sulla nuova colonna.

Infatti

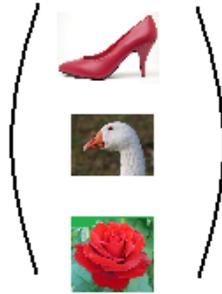
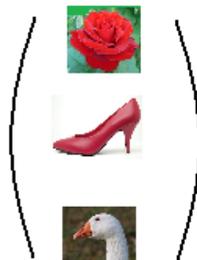
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e poi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

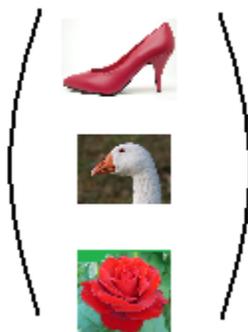
come appunto avevamo trovato. E adesso è quasi inutile dire che se moltiplichiamo le due matrici quadrate in ordine inverso troviamo un risultato diverso.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quest'ultima matrice, operando sul nostro vecchio

ci dà  una diversa combinazione, cioè

Provate con oche e scarpe e rose; cucchiai, forchette coltelli o con altri oggetti e vedrete che è cosi. Scambiando l’ordine delle permutazioni non sempre si ottiene lo stesso risultato.

E quante sono le permutazioni di n oggetti?  L’abbiamo visto a suo tempo, ed abbiamo persino dato un nome al numero risultante, cioè  “tre fattoriale”, 3! = 3 x 2 x 1, sei permutazioni.

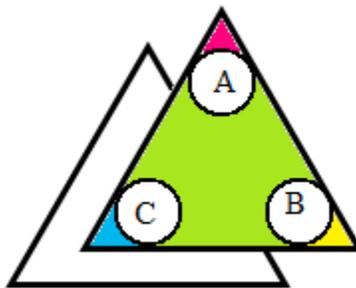
Provate a trovare

- Primo: le sei permutazioni di

- Secondo: le sei matrici 3x3 che fanno passare da questa permutazione a ciascuna delle sei permutazioni (inclusa cioè quella che abbiamo).

Noto che per permutazione si può intendere tanto la matrice che opera la permutazione, quanto il risultato ottenuto scambiando fra loro gli oggetti in qualche modo.
Non è difficile vedere che la riga sceglie il posto e la colonna ci dice l'oggetto. Un "1" nella prima riga, terza colonna, ci dice che al primo posto (prima riga) va il terzo oggetto (terza colonna). E allora non dovrebbe essere difficile divinare l'effetto dell'operazione della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

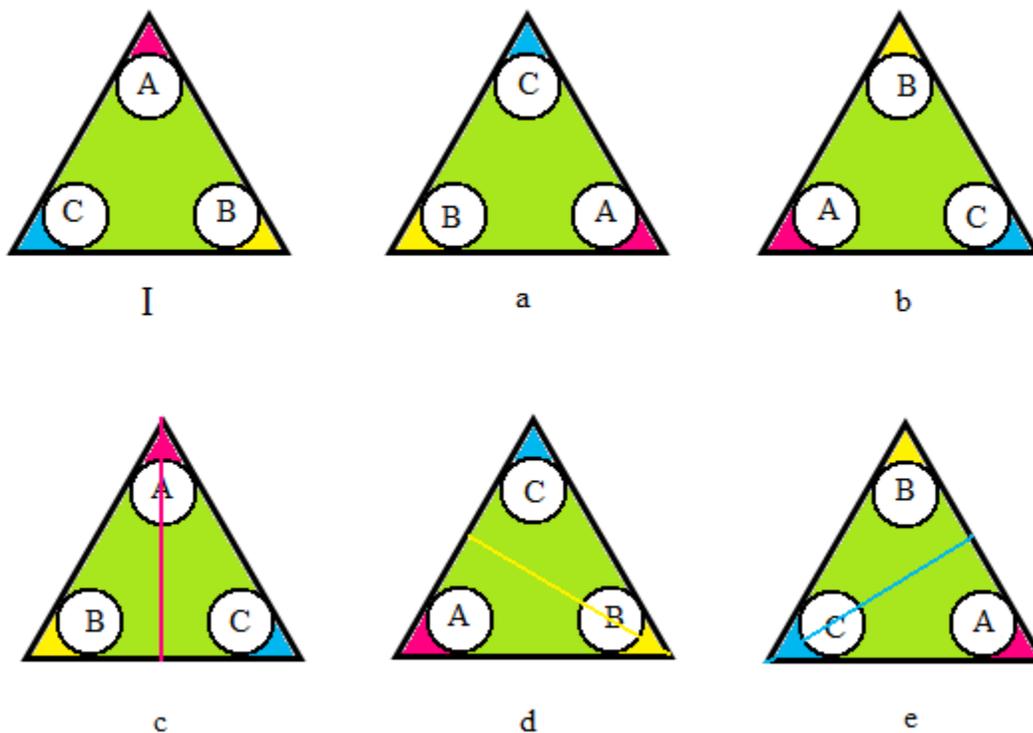
Ma queste sei permutazioni, che a prima vista hanno tutti gli stessi diritti, non giocano nella stessa squadra, fatto a prima vista sorprendente.

Per andare più a fondo in questa questione consideriamo ora un triangolo equilatero ed immaginiamo di metterlo in una forma triangolare fissa, come quella che si usa nel biliardo americano per giocare a "8-ball".

Abbiamo sei possibilità di operare sul nostro triangolo in modo che il risultato stia nella forma rigida.

1) Possiamo lasciare il triangolo com'è (ABC).
2) Possiamo ruotarlo di 120 gradi in senso orario (CAB)
3) Possiamo ruotarlo di 240 gradi in senso orario (BCA)

Si noti che se ruotiamo di altri 120 gradi ritroviamo (ABC), cioè non abbiamo cambiato nulla.

4) Operare una riflessione rispetto all'asse passante per A (ACB)
5) Operare una riflessione rispetto all'asse passante per B (CBA)
6) Operare una riflessione rispetto all'asse passante per C (BAC)

Queste sei operazioni sono rappresentate nella seguente figura.

Il loro insieme ha  delle interessanti proprietà.

1) Anzitutto, eseguendo due operazioni di seguito ("facendone il prodotto"), otteniamo un'altra operazione  dell'insieme.  Ad esempio, seguendo i vertici ABC nell'ordine (sopra, destra, sinistra), vediamo che le operazioni *aa* eseguite una dopo l'altra, producono la b. Infatti la prima *a* porta a CAB, la seconda *a* porta a BCA, che è la b.

Che un'operazione generica *g* scelta fra le nostre sei, "moltiplicata" per un'operazione *h* generica scelta fra le nostre sei conduca ad un'operazione ben definita tra le sei indicate non è un risultato straordinario: queste varie operazioni semplicemente permutano i tre vertici del triangolo dando sei risultati differenti, e di permutazioni di tre oggetti, in questo caso i vertici del triangolo, ce ne sono appunto sei e solo sei.

In effetti possiamo fare una tavola delle permutazioni dei tre vertici, che però vale  in generale per qualsiasi terzetto di oggetti, in cui identifichiamo ognuna delle permutazioni con una delle operazioni I, a, b, c, d, e. Una delle notazioni che si possono adottare per indicare le permutazioni è quella di supporre di partire dalla disposizione di oggetti (1,2,3) ed indicare la posizione dopo la permutazione. In questa notazione, [2,1,3] significa aver messo il secondo oggetto al primo posto ed il primo oggetto al secondo posto. Il terzo oggetto è rimasto al suo posto.

Abbiamo così:

**I = [1,2,3], a = [3,1,2], b = [2,3,1], c =[1,3,2], d =[3,2,1], e =[2,1,3]**

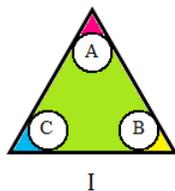
Fare il prodotto di due permutazioni significa eseguirle una dopo l'altra, cominciando da quella di destra. Per esempio [2,3,1][1,3,2] = [3,2,1], Cioè la prima permutazione [1,3,2] aveva scambiato di posto il secondo e il terzo oggetto. La seconda permutazione ha messo al primo posto quello che ha trovato al secondo (cioè il terzo oggetto originale); ha messo al secondo posto l'oggetto che ha trovato al terzo posto (cioè il secondo oggetto originale); infine ha messo al terzo posto quello che ha trovato al primo (cioè il primo oggetto originale).

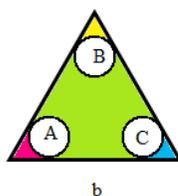
Ma di nuovo, potrebbe osservare qualcuno, qui si parla di "moltiplicazione" e di "prodotto", ma non abbiamo fatto nessuna moltiplicazione. Vero, ma non c'è nessuna legge che prescrive che cosa noi possiamo o non possiamo chiamare moltiplicazione. Questa nostra moltiplicazione obbedisce ad alcune proprietà della moltiplicazione, e, se ciò può accontentare, può essere espressa (come vedremo) come un prodotto di matrici.

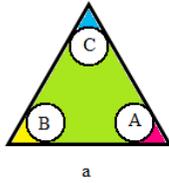
2) La moltiplicazione è associativa, cioè (ab)c = a(bc). Provare con qualche esempio.
3) Esiste un' operazione "unità" o "identità", I, che non cambia la situazione. Nel nostro gruppo di permutazioni la I è appunto l'identità: infatti non cambia il posto agli oggetti. Il primo resta al primo posto, il secondo al secondo, il terzo al terzo.
4) Ogni operazione $g$ ha un inverso unico, cioè un'operazione $g^{-1}$ tale che $g\,g^{-1} = g^{-1}g = I$.

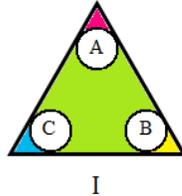
Un insieme di oggetti, permutazioni, operazioni, a cui è associata un'opportuna forma di moltiplicazione e che possiede queste proprietà, si chiama "Gruppo" ed è studiato, vedi caso, dalla "Teoria dei Gruppi", che ha applicazioni praticamente in ogni campo. In particolare, le permutazioni di tre oggetti con cui abbiamo giocato prima, costituiscono un gruppo che ha pure un nome attraente: si chiama "$S_3$". Invece il gruppo che stiamo esaminando si chiama "Gruppo del triangolo". I due gruppi hanno oggetti diversi, ma hanno la stessa struttura, come vedremo più in dettaglio. I due gruppi sono "isomorfi".

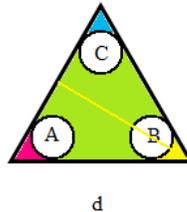
Può capitare che agendo n volte con un elemento, ritroviamo l'identità. Partiamo dalla I

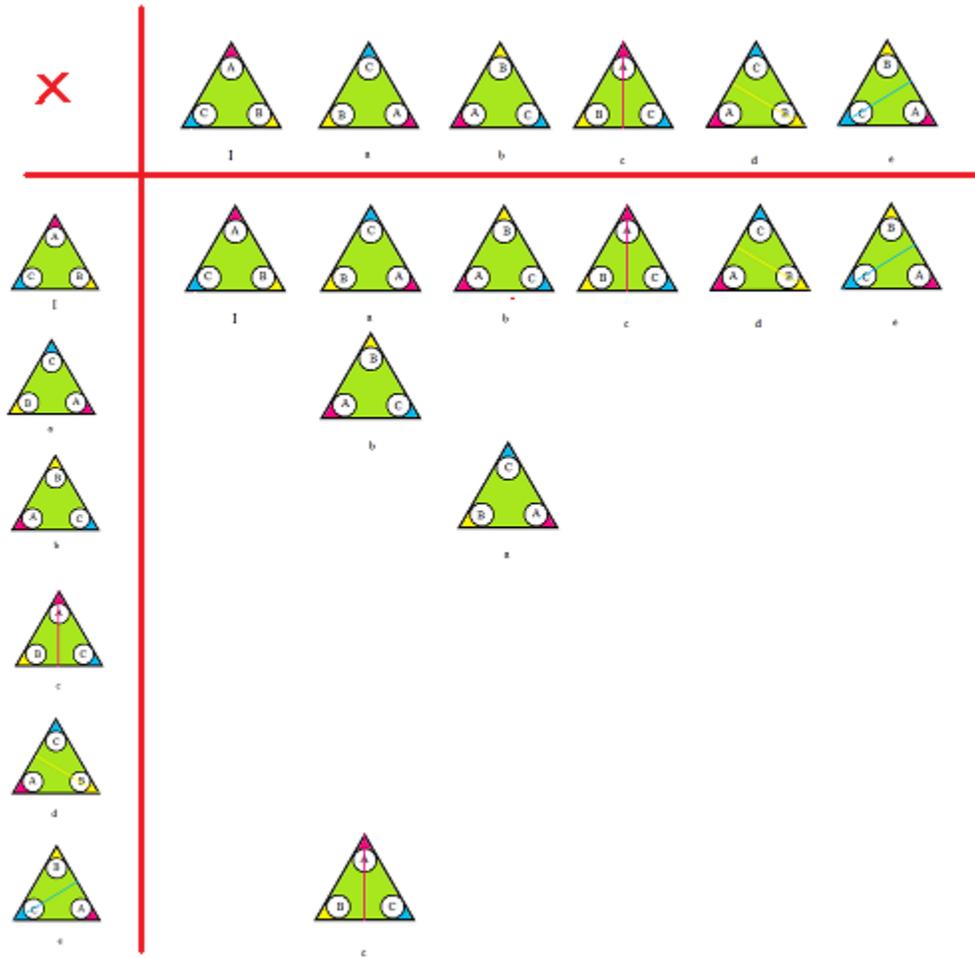
I

e operiamo con la b: otteniamo

b

Adesso operiamo di nuovo con la b: troviamo la

a

Operiamo ancora una volta con la b, e troviamo la

I

Abbiamo dunque trovato che $b^2 = a$, e $b^3 = I$. Questo numero 3, che ci dice quante volte dobbiamo operare con uno stesso elemento del gruppo per raggiungere I, si chiama “ordine” dell’elemento.
Se operiamo con *a*, troviamo che anche l’ordine di *a* è 3.
Invece, se operiamo con *d* sull’identità troviamo:

d

Che abbiamo ottenuto per riflessione rispetto alla linea gialla. Operare di nuovo con *d*, però, significa scambiare di nuovo A e C lasciando B invariato. E il risultato è l’identità.

Abbiamo allora che $d^2 = I$ e *d* (come *c* ed *f*) è un elemento del secondo ordine.
Dunque incominciamo a vedere che le sei permutazioni si sono differenziate in tre classi distinte, cioè un’identità, due operazioni di ordine 3 e 3 operazioni di ordine 2. Sembravano tutte eguali, e invece!
Consiglio di giocare col gruppo del triangolo e con quello delle permutazioni, per esempio costruendo la tavola di moltiplicazione, di cui do alcuni elementi (si deve intendere che per prima si eseguisce l’operazione che dà il nome alla colonna, poi quella che dà il nome alla riga):

Usando lettere invece che disegni, possiamo scrivere una bella tavola di moltiplicazione, magari provando non con i triangoli, ma con le permutazioni. Noto che è assai facile confondersi con le permutazioni, anche se è un ottimo esercizio cercare di farle a mano. Comunque qui ho un programmino in QBasic, che fa i prodotti di due permutazioni di tanti oggetti quanti volete.

***PROGRAMMA IN QUBASIC NUMERO 26: PRODOTTO DI DUE PERMUTAZIONI***

```
CLS
REM Calcolo del prodotto di due permutazioni
10 INPUT "quanti oggetti? ", quanti
FOR i = 1 TO quanti
INPUT "termine1 ", a(i)
NEXT i
PRINT "Prima permutazione: ",
FOR i = 1 TO quanti
PRINT a(i),
NEXT i
FOR i = 1 TO quanti
INPUT "termine2 ", b(i)
NEXT i
```

```
PRINT "seconda permutazione: ",
FOR j = 1 TO quanti
PRINT b(j),
NEXT j
FOR j = 1 TO quanti
FOR i = 1 TO quanti
IF b(j) = i THEN c(j) = a(i)
NEXT i
NEXT j
PRINT "Prodotto: ",
FOR k = 1 TO quanti
PRINT c(k),
NEXT k
END
```

Ci sono due  istruzioni facoltative (su fondo giallo): la END finale, che vuol dire “Fine”, e non è necessaria, e il REM iniziale, che vuol dire annotazione, comment, di cui abbiamo già parlato. Questo  programma  chiede anzitutto quanti elementi volete permutare, poi vi chiede gli elementi della prima permutazione, poi quelli della seconda, poi fa il prodotto e infine lo stampa sullo schermo. Il nucleo del programma è il blocco verde. Cercate di capire quello che fa, magari provando a mano.  Non è facilissimo.

Nella tavola qui sotto la prima permutazione è quella che dà il nome alla colonna. La seconda è quella che dà il nome alla riga.

| | I | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | I | a | b | c | d | e |
| a | a | b | I | e | c | d |
| b | b | I | a | d | e | c |
| c | c | d | e | I | a | b |
| d | d | e | c | b | I | a |
| e | e | c | d | a | b | I |

Scambiare oggetti in tre scatole, manovrare un triangolo ed eseguire ancora altre operazioni con altri oggetti, sono varie operazioni che però possono tutte avere una rappresentazione in termini di matrici, come abbiamo visto con scarpe, oche e rose.

Nel nostro caso, sei matrici quadrate che rispettino la stessa tavola di moltiplicazione possono essere prese come “rappresentazione” del nostro gruppo. Di queste rappresentazioni ne possono esistere svariate, con matrici in varie dimensioni.

Nel nostro caso, però, le matrici non possono essere qualsiasi. Cerchiamo di ricordare com’erano fatte le matrici che effettuavano le permutazioni di tre oggetti (e vorrei che vi prendeste carta e matita e faceste gli esempi che suggerisco). Dunque le righe delle matrici corrispondevano ai posti e le colonne agli oggetti.
Anzitutto le nostre matrici **contenevano solo le cifre 0 e 1**. Se avessero avuto delle cifre maggiori di 1 avremmo potuto trovarci con due o tre oche, mentre un’oca che cambia posto non può diventare due oche. E non parliamo dei risultati se avessimo avuto cifre negative.
Secondo, **ogni riga e ogni colonna poteva contenere uno e un solo 1**. Se ci fosse stato più di un 1 in una riga, il risultato sarebbe stato che nello stesso posto avremmo trovato due oggetti, per esempio un’oca con una scarpa. Se ci fosse stato più di un 1 in una colonna avemmo trovato due oggetti eguali in due posti diversi. Anche qui avremmo creato una scarpa, o una rosa, o un’oca o più.
**Non poteva esserci una riga o una colonna di soli zeri.** Una riga di soli zeri significa che il posto corrispondente alla riga resterebbe vuoto; invece, una colonna di soli zeri significa che un oggetto non comparirebbe nella permutazione risultante.
Il secondo e il terzo divieto sono riassunti in un unico divieto, che la matrice “non deve essere singolare”. Per decidere se una matrice sia singolare o no esiste un criterio relativamente semplice, ma non è necessario introdurlo qui: per il nostro caso basta che la matrice rispetti le tre leggi che abbiamo detto.
Così i conti tornano: quante sono le matrici possibili per rappresentare le permutazioni di tre oggetti? Di gruppi di matrici che hanno un 1 nella prima riga ce ne sono tre (con 1 al primo, al secondo o al terzo posto). Per ognuno di questi tre gruppi ci sono solo due possibilità di piazzare un 1 nella seconda riga, perché non deve essere in colonna con l’1 della prima riga, e a questo punto la 1 della terza riga non ha scelta, se non vuole stare in colonna né con la 1 della prima riga né con quella della seconda. Cioè abbiamo sei matrici, che è quel che volevamo per rappresentare sei permutazioni.

$$\underset{I}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\quad \underset{a}{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}\quad \underset{b}{\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}}\quad \underset{c}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}\quad \underset{d}{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}\quad \underset{e}{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

Una rappresentazione banale è quella unidimensionale in cui ogni elemento è l’unità. Tutte le regole di moltiplicazione sarebbero soddisfatte, ma ci servirebbe poco.

Una seconda rappresentazione è un poco più fantasiosa: si ponga
$I = a = b = 1, \quad c = d = e = -1$.
A guardar bene, questa è la rappresentazione “grigia e arancione”, nella figura che segue.

Infatti, se coloriamo di arancione I,a,b e di grigio c, d, e, vediamo che la nostra tavola di moltiplicazione è ordinatamente colorata.

| | I | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | I | a | b | c | d | e |
| a | a | b | I | e | c | d |
| b | b | I | a | d | e | c |
| c | c | d | e | I | a | b |
| d | d | e | c | b | I | a |
| e | e | c | d | a | b | I |

Per così dire, la nostra tavola di moltiplicazione ha "in filigrana" una seconda tavola di moltiplicazione (grigia e arancione) , che è, ad esempio, quella della regola dei segni. Non solo, ma mentre *I, a, b* tra loro commutano, nel senso che $ab = ba$, vediamo che le operazioni *c, d, e* non commutano più, nel senso che $ae = d$ , mentre $ea = c$.
Inoltre (*I*,*a*,*b*) formano una famigliola isolata, nel senso che moltiplicandoli fra loro non si esce dall'insieme *(I, a, b).* Questa famigliola è detta sottogruppo, perché, pur essendo parte di un gruppo più esteso, ha tutte le proprietà di un gruppo. Invece la famigliola (*c*,*d*,*e*) non è un sottogruppo, perché non ha le proprietà di un gruppo. Moltiplicando fra loro (*c*,*d*,*e*) si esce dalla famigliola. Ad esempio, $cd = a$.

Qualcuno può far osservare:"Ah, ma voi siete stati furbi a mettere *I a b c d e* in quell'ordine, da cui dipende la possibilità di tagliare la tavola di moltiplicazione in quattro. Se aveste usato l'ordine *a c I e b d* avrei voluto proprio vedere se avreste potuto eseguire questa separazione!". Ma non è mica proibito essere furbi. Il punto importante è che questa separazione è possibile, ed esistono metodi per arrivarci. Con una differente tavola di moltiplicazione potrebbe essere impossibile, anche se provaste tutte le possibili permutazioni di oggetti (quante sono?).

Riassumo gli insegnamenti principali di questo capitolo un po' farraginoso.

1) La matematica in generale può dare risultati che ci scandalizzerebbero nell'aritmetica ordinaria, cioè 2 x 2 potrebbe anche non fare 4.
2) La matematica può operare anche su oggetti che non sono numeri.
3) Le operazioni possono anche non essere le quattro operazioni a cui siamo abituati. Possono essere permutazioni, rotazioni o altre trasformazioni ancora.
4) Il calcolo per mezzo di matrici estende le operazioni che conosciamo (non abbiamo visto la divisione, ma – credetemi - anche quella può esser considerata come un'estensione del rapporto di numeri).

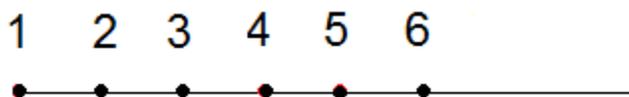
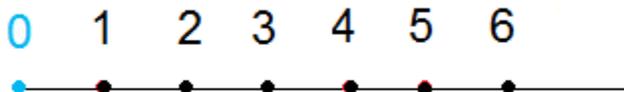
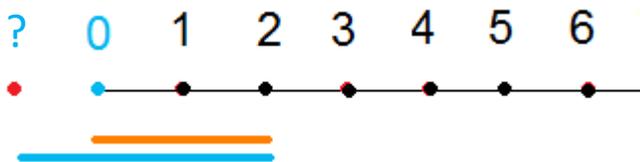
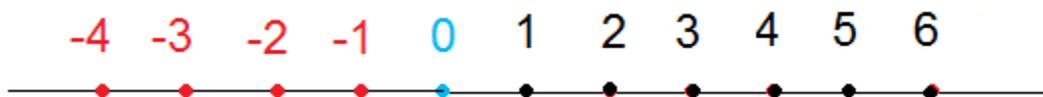
5) Oltre ad estendere le operazioni note sui numeri ordinari, le matrici possono rappresentare quasi ogni operazione su oggetti diversi da numeri.
6) Ci sono collezioni di oggetti per cui esiste UNA SOLA operazione, la quale è definita attraverso una tavola di moltiplicazione. Se queste collezioni di oggetti, insieme con l'operazione per loro definita, seguono certe semplici leggi essi formano un "gruppo".
7) Gruppi di n oggetti diversi e con operazioni diverse, possono avere la stessa tavola di moltiplicazione: in quel caso parliamo di gruppi *isomorfi*, che possono essere tutti quanti rappresentati con opportune matrici, con un'unica operazione universale, che è il prodotto di matrici.

Le applicazioni della teoria dei gruppi sono estesissime. Per esempio può essere usata per dimostrare un teorema [[di Ruffini e poi di Abel]], che riguarda le equazioni algebriche. Questo teorema può essere dimostrato sui due piedi da pochissimi, forse mille in tutta Italia. Io non sono uno di questi mille.

**LXI. VARIE SPECIE DI NUMERI**

I numeri che si apprendono per primi, per esempio contando oggetti, sono detti NATURALI.

Essi sono 1,2,3,4,5,6….
Abbastanza presto ci si accorse che i numeri sono infiniti. L'infinito non lo possiamo raggiungere, ma ci accontentiamo di dire che se uno dice un numero, noi ne possiamo dire altri che sono maggiori di quello. A noi, questo basta per dire che ci sono infiniti numeri.

Adesso che sappiamo fondere numeri e disegno, possiamo disegnare questi numeri su una retta.

Più tardi fu aggiunto lo zero, ma tutto sommato restiamo ancora tra numeri naturali.

Su questa bella famigliola si potevano fare le quattro operazioni, ma con certe restrizioni.
Per esempio, l'ADDIZIONE sempre.
La MOLTIPLICAZIONE sempre.
Ma già con la sottrazione non sempre il risultato restava in famiglia. Per esempio 2-3.

L'operazione 2-3 ed altre consimili ci portano ad introdurre una grande famiglia di numeri: i numeri negativi. Con questo, anche la sottrazione diventa sempre possibile.

La bella famiglia così creata, è quella dei numeri INTERI.

Ora però era il turno della divisione. Dividendo 6 per 2 si restava in famiglia, ma dividendo 2 per 3 no. Nessun numero intero, positivo o negativo, moltiplicato per 3 dava 2.

Venne così introdotta una nuova specie di numeri, i numeri RAZIONALI. Questi esistono, ma non si possono disegnare **tutti** sulla nostra retta. Qualcuno sì, tutti no. Tra zero e uno ce ne sono infiniti, ma non ce n'è uno più piccolo o uno più grande. Non c'è un numero razionale più vicino a 1 o a zero di ogni altro. Provare per credere.

D'altra parte abbiamo visto che i numeri razionali non sono la totalità dei numeri, ma ce ne sono altri, i numeri IRRAZIONALI, che abbiamo trovato col "procedimento trasversale", quando si parlava di pigreco. In realtà questi sono assai più numerosi dei numeri razionali, e insieme con essi coprono uniformemente la nostra retta. Questi numeri ci permettono anche di risolvere problemi come la radice di due, che, come abbiamo visto, non può essere un numero razionale.

Numeri interi, razionali, irrazionali, tutti insieme coprono uniformemente la nostra retta e sono detti numeri REALI.

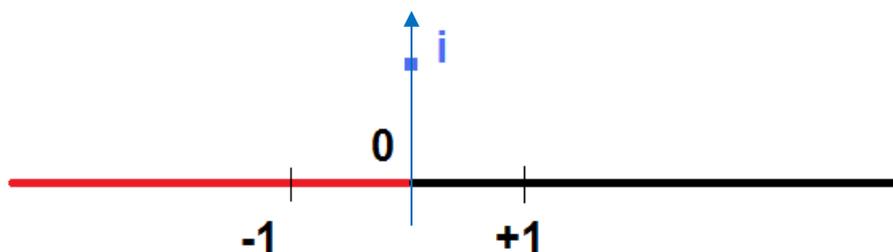
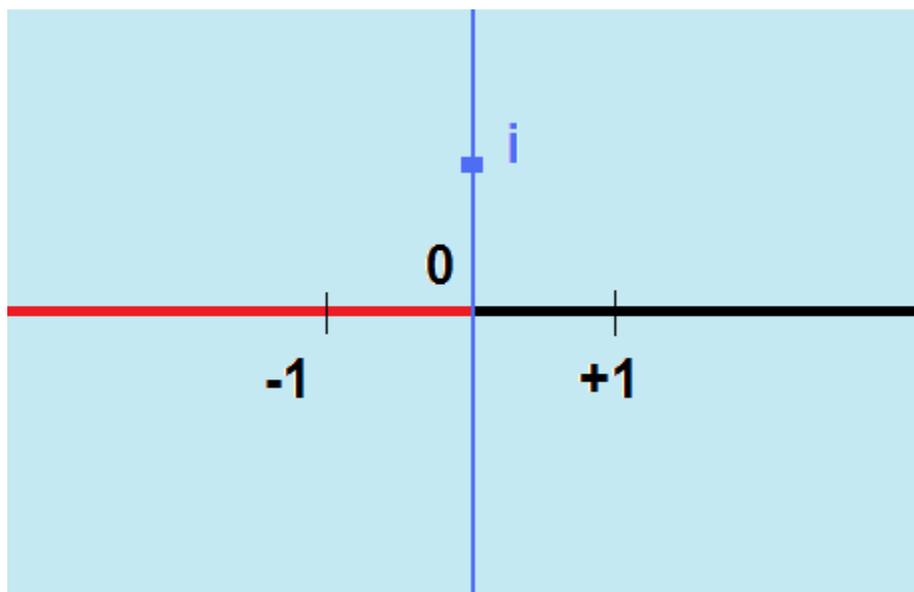
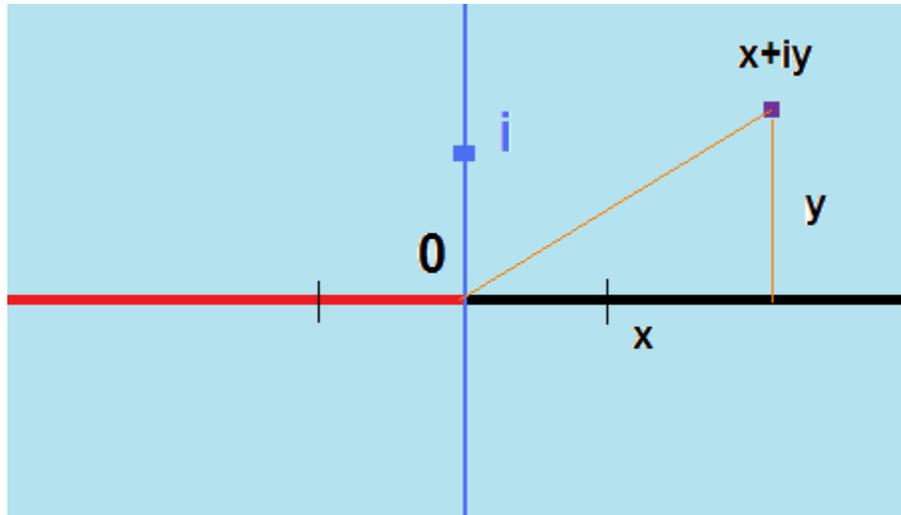
0

Ci sono ancora alcune operazioni dal risultato incerto. Per esempio qualsiasi numero non-zero diviso zero, per esempio 4/0. Questo noi lo definiamo come infinito e lo indichiamo con $\infty$.

Secondariamente il risultato della divisione 0/0. Questo è un risultato indeterminato. Che significa? Che **qualsiasi numero** ne è la soluzione. Infatti il risultato della divisione (quoziente) è corretto se moltiplicato per il divisore ci dà il dividendo. Ma qualsiasi numero scegliamo come quoziente (1,5, 2.456, $\sqrt{2}$, etc) moltiplicato per zero (divisore) ci dà zero (dividendo). Questa è un'eccezione nel nostro sistema. Prendere o lasciare.

Questa stranezza vi permette di rispondere alla domanda che vidi fare alla televisione: scrivere 65 con quattro 8. Evidentemente ci si aspettava il risultato 8/8+8×8 = 65. Però, in base a ciò che ho appena detto, anche (8-8)/(8-8) = 0/0 va bene, proprio perché 0/0 vale qualsiasi numero, incluso 65.

Infine c'era l'eccezione delle eccezioni, cioè quale numero poteva essere preso come $\sqrt{-1}$. Poiché sappiamo che "Meno per Meno dà Più", numeri negativi moltiplicati per se stessi danno numeri positivi. E, ovviamente, numeri positivi moltiplicati per se stessi danno numeri positivi. E allora, quali numeri moltiplicati per se stessi possono dare dei numeri negativi? Senz'altro possiamo inventare un numero, che potremmo chiamare "i" $=\sqrt{-1}$. Ma dove lo mettiamo sulla

nostra retta rossa e nera? Spiacenti, ma sulla retta rossa e nera non c'è posto per il nostro punto azzurro. Possiamo solo metterlo fuori di essa.

Ma, aggiungendo questo punto fuori della retta, l'intero piano fu colonizzato dai numeri. I numeri seduti sulla retta rossonera indicata sopra, furono chiamati "numeri reali". Ma sono assai più numerosi i numeri "azzurri" che popolano il piano, i "numeri COMPLESSI".

Dato che popolano un piano, questi numeri sono individuati da due coordinate.

Possiamo scegliere tra diverse notazioni, ciascuna con i suoi pregi e con i suoi difetti.

Possiamo pensare al punto P individuato da una coppia di coordinate (x, y), oppure possiamo pensare che il punto P rappresenti il numero z = x+iy. Se usiamo questa seconda notazione, le quattro operazioni diventano più intuitive, purché:

1) Ricordiamo che

$$i^2 = -1$$

Il numero i è stato introdotto proprio per soddisfare questa equazione. Questa proprietà diventa anche più intuitiva se si interpreta "i" come un'istruzione "fare un passo di una unità a 90 gradi dalla direzione precedente". Così diviene ovvio che $i^3 = - i$.

2) Teniamo sempre ben separate le due parti del numero, quella che, fatte le operazioni, non contiene l' "unità immaginaria" i e quella che la contiene. Noto che la prima parte, senza i, si chiama parte reale (Re z) e la seconda si chiama parte immaginaria (Im z), da cui

z = Re(z) + i Im (z).

Allora:

**ADDIZIONE** (e, naturalmente, sottrazione):

(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)

Se passiamo alla notazione a coppie abbiamo che (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d) e ci saremmo potuti arrivare da soli.

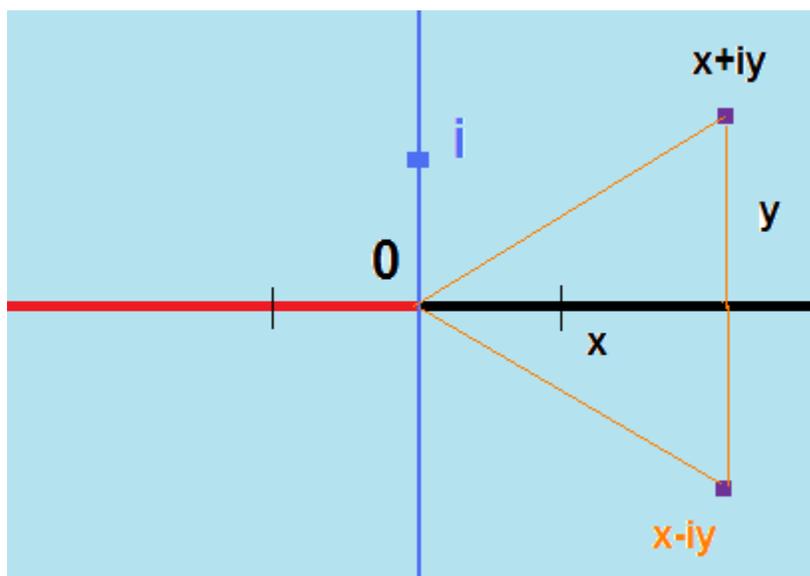
**MOLTIPLICAZIONE.**

(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc), con un segno meno ovviamente dovuto ad una moltiplicazione (ib)(id)= $i^2$bd= (-1) bd. La notazione a coppie è molto meno intuitiva: (a,b)(c,d)= (ac-bd, ad+bc).

Per fare la **DIVISIONE** teniamo presente che noi preferiamo non avere una i al denominatore. E per eliminarla sfruttiamo questa interessante proprietà:

**(+i)(-i)= - (-1) = +1.**

Di qui risulta un'importante conseguenza: $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$. Ne vedremo più avanti un'applicazione, penso, imprevedibile.

x-iy è detto il "numero complesso coniugato" di x+iy, ed è come la sua riflessione speculare rispetto all'asse reale.

In quanto al numero reale $x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy)$, se osservate bene, non è altro che un'applicazione del teorema di Pitagora, che ci dà la distanza dall'origine del punto z = x+iy (o anche del complesso coniugato x-iy).

Così, se vogliamo dividere a+ib per c+id e non vogliamo delle i tra i piedi al denominatore, non dobbiamo fare altro che moltiplicare la nostra frazione (a+ib)/(c+id) sopra e sotto per (c-id).

$$\frac{(a+ib)}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac-bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Buone (o cattive?) notizie: non avremo più occasione di usare la divisione. Naturalmente, la divisione espressa con la notazione a coppie è ancora meno intuitiva. Provate a scriverla.

Ci resta ancora un capitolo, che vedremo separatamente, quello delle potenze. Non è proprio per tutti, ma i risultati compensano lo sforzo.

In attesa, qualche lettore particolarmente maligno potrebbe dire: "Ci era stato detto che con le matrici si possono rappresentare tutte le operazioni che vogliamo. Possiamo rappresentare anche

le operazioni con i numeri complessi?". Buona domanda. La risposta, naturalmente, è sì (altrimenti probabilmente non avrei riportato la domanda). Il numero complesso a + ib può essere rappresentato come

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Cioè, notate bene, la parte reale e la parte immaginaria compaiono due volte. Quindi:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

con la parte reale e la parte immaginaria del prodotto che compaiono due volte, nei posti giusti e coi segni giusti.

Come vedete, potremmo scrivere

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi qualcuno potrenbbe dire: "Ma allora l'ultima matrice a destra rappresenta il numero *i* !?"

Ciò è esatto se si accetta che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresenti 1, e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ rappresenti -1. Allora abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cioè $i \times i = -1$.

Qualcun altro un po' esasperato potrebbe chiedere: ma quando finirà questa storia? Noi continuiamo ad estendere il campo dei numeri ad ogni problema che non possiamo risolvere. Adesso salterà fuori un altro problema, per esempio $\sqrt[3]{-i}$, e magari dovremo tirare fuori un'altra estensione. La risposta è NO. Neanche le operazioni più cervellotiche che possiamo inventarci con i numeri che abbiamo finora considerato richiederanno l'introduzione di nuovi numeri.

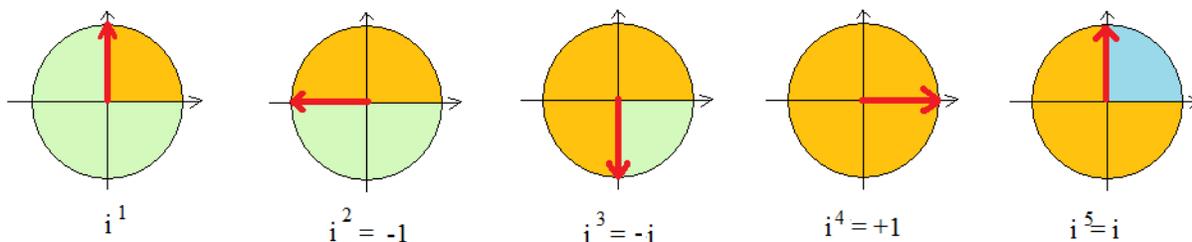
Un altro, più avventuroso, potrebbe pensare che allora si potrebbe aumentare ancora la famiglia passando a tre, quattro cinque dimensioni (dimensioni non di uno spazio geometrico, dove ci si può sbizzarrire come si vuole, ma di uno spazio, per così dire, numerico). Ma non è così. Questo ultimo ampliamento ai numeri complessi non ne richiede altri. E d'altra parte tutti i tentativi che furono fatti per passare ad un numero maggiore di dimensioni diedero interessanti entità, che però non si possono più considerare numeri, perché mancano di troppe caratteristiche che ci aspettiamo dai numeri.

## LXII. POTENZE COI NUMERI COMPLESSI

Resta dunque ancora un passo da compiere. Se facciamo la potenza ennesima di un numero complesso $a + ic$ il problema non è grave. Abbiamo la nostra formula

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

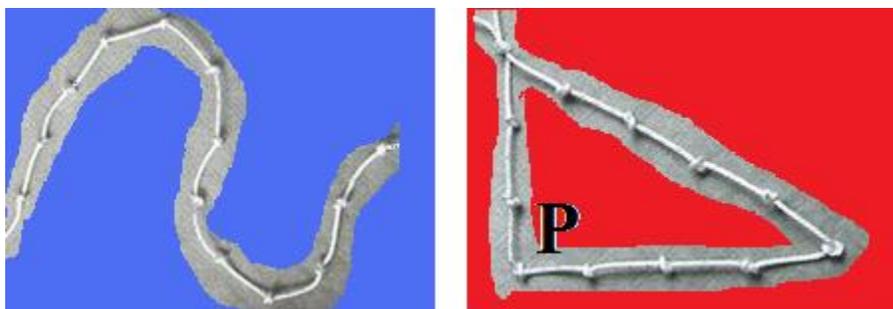
E possiamo sostituire ovunque a *b* il nostro *ic*, ricordando che le potenze di *i* sono come segue:

$i^2 = -1$, $i^3 = i\,(-1) = -i$, $i^4 = i\,(-i)$ oppure $(-1)(-1)$, insomma $=1$, dopodiché si ricomincia il giro.

E' come se ad ogni aumento di 1 dell'esponente, la *i* ruotasse come la lancetta di un orologio, però tre ore per volta, 90°.

Dunque, con un poco di attenzione, non dovremmo avere problemi.

In particolare, la seconda potenza, che può anche essere calcolata direttamente come (a+ib)(a+ib) ha come risultato

$$\mathbf{(a^2 - b^2) + i\,(2ab),}$$

avendo avuto cura di separare la parte reale da quella immaginaria.
Questa banale formuletta ha molte applicazioni.
Per esempio ci può aiutare a trovare dei triangoli rettangoli i cui lati siano numeri interi. Gli Egiziani, quando dovevano tracciare un angolo retto tra ippopotami, papiri e coccodrilli, prendevano uno spago, per esempio di dodici metri (loro usavano i "cubiti", ma non ha nessuna importanza), fissavano un nodo o un anello ad intervalli di 1 metro e annodavano gli estremi dello spago. Poi lo stendevano nel fango, sceglievano il punto, che chiameremo P, sul terreno dove volevano l'angolo retto, mettevano un paletto nel nodo o in un anello qualunque piantato in P, tendevano lo spago verso una direzione che faceva loro comodo, contavano tre metri e fissavano un altro paletto. Poi tendevano lo spago restante e fissavano un nuovo paletto a cinque metri dal precedente. Lo spago doveva essere teso tanto rispetto al paletto precedente quanto a quello di partenza. A questo punto erano necessariamente a 4 metri da quest'ultimo e, sorpresa delle sorprese, il triangolo era rettangolo con un angolo retto in P.

I triangoli rettangoli con lati che sono tutti e tre numeri interi non sono frequenti e si chiamano triangoli pitagorici. Diciamo anche che *a,b,c* formano una terna pitagorica. Il quadrato di un numero complesso $a + ib$ in cui a e b siano numeri interi qualsiasi ci dà sempre i mattoni per costruire un triangolo pitagorico. La parte reale e la parte immaginaria sono i due cateti, l'ipotenusa, radice quadrata della somma dei loro quadrati, sarà un numero intero. Miracoloso!

Esempi, con a e b presi a caso. A, B, C formano una "terna pitagorica":

| a | b | $A = a^2 - b^2$ | $B = 2ab$ | $C^2 = A^2 + B^2$ | C |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | **3** | **4** | 25 | **5** |
| 3 | 1 | **8** | **6** | 100 | **10** |
| 3 | 2 | **5** | **12** | 169 | **13** |
| 4 | 1 | **15** | **8** | 289 | **17** |
| 141 | 87 | **12312** | **24534** | 753502500 | **27450** |

Notate intanto che i triangoli pitagorici che abbiamo trovato non sono tutti diversi. Il primo e il secondo hanno i cateti scambiati, ma i lati sono proporzionali. Quindi il secondo non conta come nuovo triangolo pitagorico.
Più interessante è il fatto che nell'ultima riga il numero $C^2$ è un numero enorme. Eppure, senza neanche calcolare la radice quadrata, voi sapete che è necessariamente un quadrato perfetto. La dimostrazione di questo notevole risultato è semplice: provate a scrivere per disteso la somma $A^2+B^2$ sostituendo la loro espressione in termini di a e b, e vedrete quel che succede.

Ma torniamo a noi. Nello studio delle potenze dei numeri complessi il bello viene se **l'esponente stesso è immaginario.**
Potremmo voler calcolare, per esempio, $10^{a+ib}$. Tuttavia, assumendo che le regole che conosciamo sulle potenze valgano anche per i numeri complessi, $10^{a+ib} = 10^a 10^{ib}$, in cui $10^a$ è una comune potenza di quelle che già conosciamo. Allo stesso modo, $10^{ib}$ non è altro che $(10^i)^b$, il che significa che una volta trovato $10^i$ possiamo fare le potenze che vogliamo. Non è detto che sia semplice, e ci sono metodi più efficaci, ma in linea di principio vediamo che la cosa è fattibile.

Ora vi chiedo di accettare che i calcoli riescono meglio usando la "base naturale", cioè il numero *e* per fare questo calcolo. Usando la base 10 salterebbero inevitabilmente fuori dei numeri 2.303

o 0.4343 o altri affini per dirci che la base non è naturale. Invece sappiamo che $1.0001^{10000}$ ci dà quattro cifre di e. Ora 1.0001 non è altro che 1 + 0.0001 e $1.0001^{10000} = (1 + 0.0001)^{10000}$.
Tutti questi calcoli sono imprecisi, e si affinano sempre di più facendo passi sempre più piccoli, che non devono essere per forza del tipo 1/1000, 1/100000 o simili. Possono anche essere 1/189654 e troveremo una buona approssimazione di *e* facendo:

$$\left(1+\frac{1}{189654}\right)^{189654}$$

O, se vogliamo essere più generici:

$$\mathrm{e} \rightarrow \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}$$

Le cose cambiano se scriviamo al'interno della parentesi, invece di 10000, che è del tutto arbitrario, 10000/x.

$$\left(1+\frac{x}{10000}\right)^{10000} = \left(1+\frac{1}{\frac{10000}{x}}\right)^{10000}$$

Ma l'esponente potrebbe essere scritto come

$$\left(\frac{10000}{x}\right)x$$

Mettendo tutto insieme e ponendo 10000/x = M avremmo

$$\left(\left(1+\frac{1}{M}\right)^{M}\right)^{x}$$

E questo che cos'è? La parentesi interna, per M abbastanza grande, approssima *e* e l'insieme di tutto quanto non sarà altro che un'approssimazione di $e^x$ , tanto più precisa quanto più grande sarà M. Questo, se ci pensate un poco, spiega perché $(1 + 0.0001)^{5000}$ approssima $e^{0.5}$.

Ma chi ci vieta di porre x immaginario, per esempio i?
Potremmo provare ad esplorare che succede a sostituire a x il numero i. Il numero è sempre piccolo, ma è immaginario. Se sappiamo fare potenze di numeri immaginari dobbiamo poter applicare le nostre regole. Questo tentativo sarà giustificato dal successo. Ci aspettiamo che questo risultato valga con buona approssimazione:

$$e^{i} = \left(1+\frac{i}{1024}\right)^{1024} = (1+0.009765\, i)^{1024}$$

Potremmo usare la formula per la potenza 1024 di un binomio. Ma i numeri con cui ci troveremmo ad operare sarebbero enormi ed i calcoli proibitivi. Per esempio, ci vuole il suo tempo per calcolare

$$\binom{1024}{513}$$

Noi però non siamo scemi ed abbiamo scelto 1024 $=2^{10}$ come nostro denominatore semplicemente perché ce la caviamo con 10 quadrati successivi e il quadrato di un numero complesso lo sappiamo fare. Naturalmente potremmo prendere come denominatore $2^{30}$ e ci vorrebbero 30 quadrati successivi. O potremmo prendere semplicemente 2 o 4 al denominatore, ed avremmo un risultato assai rozzo.

Vediamo con 4:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(1+0.25\ i)^2$ | $= (1-0.0625) + 0.5\ i$ | $= 0.9375 + 0.5\ i$ | approssima $e^{i/2}$ |
| $(0.9375 + 0.5\ i)^2$ | $= (0.879-0.25) + 0.9375\ i$ | $= 0.629 + 0.9375i$ | approssima $e^{i}$ |
| $(0.629+0.9375i)^2$ | | $= - 0.483 + 1.179i$ | approssima $e^{2i}$ |
| $(-0.483 +1.179i)$ | | $= - 1.157 -1.14i$ | approssima $e^{4i}$ |

I calcoli sono molto grossolani ma dicono qualcosa. Intanto vediamo che la parte reale decresce fino a diventare negativa, mentre quella immaginaria cresce, poi decresce anche lei. Tuttavia non possiamo ancora vedere la luce.
Allora passiamo come è nostro solito ad un programma in QBasic ed usiamo il denominatore 1024 come da programma.

Il rozzo programma questa volta è:

***PROGRAMMA IN QUBASIC NUMERO 27: SUCCESSIVI QUADRATI DI NUMERI COMPLESSI***

```
CLS
REM SUCCESSIVI QUADRATI DI NUMERI COMPLESSI
INPUT "Quale potenza di 2? ", POT
PASSO =1/2^POT
U=1
V= PASSO
FOR I=1 TO 2*POT
U0=U
U = U^2-V^2
V=2*U0*V
PRINT 2^I*PASSO, U,V
NEXT I
```

Magari vi incuriosisce l'istruzione U0 = U. Se non la introducete, il calcolatore calcola la nuova U all'istruzione successiva, e poi la introduce nella nuova V, scombinando tutto.

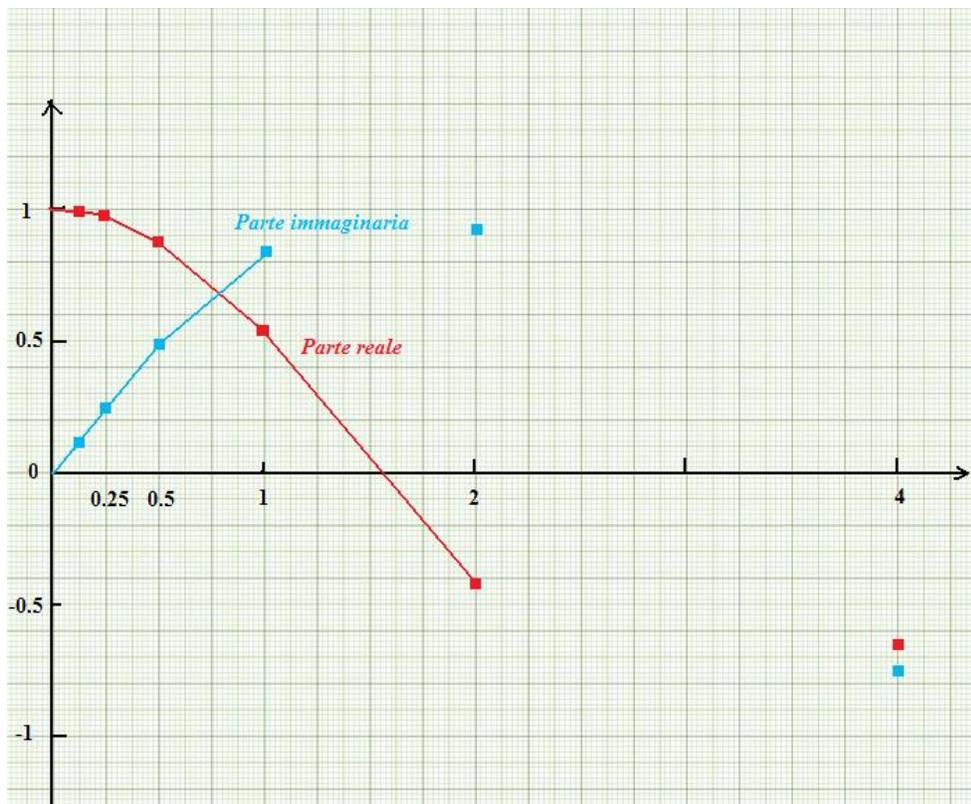
La prima colonna della tabella può ingannare. Si noti che – ad esempio - il valore di $e^{ix}$ per x =1/16 non è ottenuto come

$$\left(1+\frac{i}{16}\right) = 1 + i\ 0.0625$$

ma facendo la potenza 64 del valore iniziale, cioè:

$$(1+\frac{i}{1024})^{64} = 0.99808 + i\ 62461$$

| Valore di x in $e^{ix}$ | Parte reale di $e^{ix}$ | Parte immaginaria di $e^{ix}$ |
|---|---|---|
| 1/1024 =0.0009765 | 1.00000 | 0.0009765 |
| 1/512 = 0.0019531 | 0.99999 | 0.0019531 |
| 1/256 =0.003906 | 0.99999 | 0.003906 |
| 1/128=0.0078125 | 0.99997 | 0.0078124 |
| 1/64 =0.015625 | 0.99988 | 0.015624 |
| 1/32=0.03125 | 0.99953 | 0.031245 |
| 1/16=0.0625 | 0.99808 | 0.062461 |
| 1/8=0.125 | 0.99226 | 0.124682 |
| ¼=0.25 | 0.96903 | 0.247434 |
| ½ =0.5 | **0.87780** | **0.479542** |
| 1 | **0.540566** | **0.841881** |
| 2 | **-0.41655** | **0.910184** |
| 4 | -0.65492 | -0.758279 |
| 8 | -0.146066 | 0.993224 |
| 16 | -0.96516 | -0.290153 |
| 32 | 0.84734 | 0.560086 |
| 64 | 0.40429 | 0.949170 |
| 128 | -0.73747 | 0.767484 |
| 256 | -0.045168 | -1.13199 |
| 512 | -1.279 | 0.10226 |
| 1024 | 1.626 | -0.26166 |

Facciamo ora un diagramma della parte reale e della parte immaginaria.

Se confrontiamo le due tavole vediamo subito le grandi differenze che si sono accumulate nei quattro passi partendo da ¼ rispetto ai 20 passi partendo da 1/1024. Partire da ¼ era dunque insufficiente.

Ma perché ho segnato in rosso tre numeri? Perché esistono già in un'altra tavola da me presentata, quella che dà il cos(0.5), cos(1) e cos(2), dove 0.5, 1, e 2 sono angoli misurati in radianti.

In effetti, se cercate (per mezzo di calcolatrici, Google, QBasic) i valori di sin(0.5), sin(1) e sin(2) trovate che sono proprio i valori blu (almeno fino a una parte su mille). Anzi, visto che ci siete, potete verificare che ogni riga presenta seno e coseno dell'angolo in prima colonna, espresso in radianti. Per esempio, potreste usare Google e far cercare " EXP( A * i) ", dove A è uno degli angoli in prima colonna. E' solo verso la fine della tavola che i conti non tornano più. Il nostro passo 1/1024 è piccolo e dà risultati molto migliori del passo 0.25, ma anche quando si fanno troppi passi sbagliati, anche se di pochissimo, alla fine si va a finire fuori strada. Troverete sovente che queste approssimazioni sono particolarmente accurate solo per numeri piccoli. Ad esempio, per Angolo = 64 abbiamo sì e no una cifra giusta. Poi, da A = 256 in poi, incominciano addirittura a comparire valori superiori a 1, che, per seni e coseni, sono impossibili.

Ma che cosa abbiamo trovato, alla fin fine? Abbiamo trovato qualcosa di stupefacente, che:

$$e^{+i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$$

Questa equazione fu trovata da Euler nel Settecento, ed è considerata da molti come “la più notevole formula della matematica”. Il fisico Feynman era di questa idea. Confesso che a me queste esagerazioni non piacciono. Tuttavia questa formula, che attraverso l’unità immaginaria *i* lega una funzione che ha a che vedere con gli interessi composti con due funzioni che hanno a che vedere con i cerchi (e viceversa) ha qualcosa di sorprendente e, penso io, di eccitante. Notate poi che tutto è fatto in unità naturali, esponenziale e radianti, e quindi i Paperini con quattro dita per mano che vivono in altri sistemi solari potrebbero trovare, magari espressa in modi completamente diversi, questa stessa formula - e probabilmente l’ammirerebbero come noi.

Ma gli avventurosi possono tentare ancora un’altra avventura.
A suo tempo avevamo affermato, ma non giustificato, la formula

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \; -\infty < x < \infty$$

che deve essere anche eguale a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

per n grandissimo.

Vediamo dunque che cosa succede applicando a questo binomio la formula che abbiamo trovato a suo tempo:

$$(1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2} b^2 + \binom{n}{3} b^3 + \cdots \binom{n}{n} b^n$$

La cosa può spaventarci, perché se n = 1000, ci aspettiamo 1000 termini e via dicendo, tanto più che per avere un’approssimazione più precisa dovremmo mettere n=1000000, con 1000000 termini e ancora non basterebbe. Ma non bisogna lasciarsi prendere da quella che un mio insigne professore chiamava “viltà matematica”. Sovente, se solo ci si butta nel problema, si vede che non è terribile come sembrava.
Noi scriveremo (con notazione inaccettabile per matematici professionisti) :

$$e^x = 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 \ldots$$

Tutto quello che dobbiamo vedere è che cosa succede alle “*n*”.
Il primo termine non ha *n* e resta 1, che teniamo.
Il secondo termine ha un *n* a numeratore ed un *n* a denominatore e i due si cancellano. Resta x, che pure teniamo.
I problemi incominciano a terzo termine. A numeratore abbiamo n(n-1), a denominatore abbiamo $n^2$, che viene da $(x/n)^2$. Facciamo una tabella dei valori di

$$\frac{n(n-1)}{n^2}$$

per n = 2, 10, 1000, 1000000.

| $n$ | $\frac{n(n-1)}{n^2}$ |
|---|---|
| 2 | 0.5 |
| 10 | 0.90 |
| 1000 | 0.999 |
| 1000000 | 0.999999 |

E siamo appena all'inizio. Il nostro *n* dovrebbe andare all'infinito, nel qual caso la conclusione evidente (di cui può esser data una dimostrazione rigorosa), è che il termine

$$\frac{n(n-1)}{n^2}$$

può essere sostituito con 1, per cui il terzo termine è $x^2/2!$.
Magicamente, le n se ne vanno da ogni termine. Veramente al prossimo termine avremmo $n(n-1)(n-2)/n^3$, ma non importa:

| $n$ | $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 10 | 0.72 |
| 1000 | 0.997002 |
| 1000000 | 0.999997000002 |

Siamo un poco più distanti da 1, ma non così tanto da non poter sperare che quando *n* sarà abbastanza grande, il termine varrà praticamente 1.
Il risultato è quindi proprio la nostra serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

Ma, dirà qualcuno, tutto questo l'avevamo già accettato. Ci era stato promesso qualcosa di nuovo. Dov'è l'avventura?

L'avventura viene mettendo *ix* al posto di *x*, e ricordando le varie potenze $i^n$, che si susseguono ciclicamente (mentre la x si comporta come ogni numero reale):

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(i\,x)^n$ | 1 | ix | $-x^2$ | $-i\,x^3$ | $x^4$ | $ix^5$ | $-x^6$ | $-ix^7$ | … |

Quindi la serie per $e^{ix}$ si spezzerà naturalmente in due serie, una – con tutte le potenze pari – reale, cioè senza i, ed una immaginaria – con tutte le potenze dispari - con la i.
In entrambe queste serie i termini successivi sono alternativamente positivi e negativi.

Abbiamo quindi:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots , \qquad -\infty < x < \infty$$

Che, separando la parte reale dalla parte immaginaria, produce:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad + \frac{ix}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} \dots , \qquad -\infty < x < \infty$$

Cioè:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$$

Ma noi sapevamo che:

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sinx$$

Possiamo allora identificare le parti reali e le parti immaginarie affermando che:

$$cos\, x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\right)$$

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\right)$$

due notevoli risultati che facilitano enormemente il calcolo numerico di *sin x* e *cos x*, ad esempio se ci limitiamo ad angoli inferiori a 45°, che, come sappiamo, è tutto quel che ci occorre per risolvere i triangoli che ci possono capitare. Tre termini ci danno tre buone cifre decimali anche per angoli vicino a 45° e assai migliori approssimazioni per angoli più piccoli. In effetti utilizzando i soli primi tre termini della serie per sin(45°) otteniamo 0.70714, mentre il valore corretto è 0.70711; utilizzando i soli tre primi termini della serie per cos(45°) si ottiene 0.70743, che dovrebbe essere 0.70711, come sin(45°).

**LXIII. NUMERI PRIMI ANCORA E SEMPRE.**

Per coloro a cui interessa questo tipo di problemi, noterò che il concetto di numeri interi può essere esteso al campo complesso. Si tratta dei numeri che hanno un intero tanto nella parte reale quanto nella parte immaginaria. Naturalmente, anche il concetto di primi può essere esteso al campo complesso. Lasciando a chi è veramente interessato il compito di scoprire come viene fatta quest'estensione, che lascia immutati i numeri interi e le loro proprietà sull'asse reale ed ancora una volta è dovuta al Principe, noterò che però l'estensione al campo complesso fa scomparire metà dei numeri primi dall'asse reale. Perché?

Perché i numeri primi (a parte 2) sono tutti dispari. Questo vuol dire che sono tutti della forma p = 2n + 1. Però i numeri dispari a loro volta sono classificabili in due classi, quelli della forma 4n+1 e quelli della forma 4n +3 (che può anche esser scritta 4n-1).

Chiaramente 1,5,13,17,29 etc. sono della forma 4n+1, mentre 3, 7,19,31 sono della forma 4n-1 o 4n+3. E' un utile esercizio identificare gli n che dovremmo introdurre in ogni numero primo.

Ora, la **somma dei quadrati di due numeri interi non può mai essere della forma 4n-1.**

Infatti, se i due numeri sono entrambi pari, la somma è nella forma 4n. Infatti, $(2k)^2+(2m)^2= 4(k^2+m^2)$.

Inoltre, se i due numeri sono entrambi dispari, la somma dei loro quadrati sarà un numero pari. Provate a fare la somma dei quadrati di 2k+1 e 2m+1, e trovate che ciascun quadrato contribuisce un addendo 1, per cui il tutto è divisibile per 2.

Dunque l'unico modo per avere un numero dispari è quello di sommare i quadrati di un numero pari 2k e di un numero dispari (2m+1), quindi $(2k)^2+4m^2+4m+1$. Ma questo ci dà per i primi tre termini un bel fattore comune 4, per cui la somma dei quadrati di due numeri, uno pari e l'altro dispari, è sempre della forma 4M+1.

Esiste però una sorta di teorema inverso dalla lunga dimostrazione, che qui non daremo – valido solo per i numeri primi - secondo il quale TUTTI i numeri PRIMI della forma 4n+1 sono scomponibili in due quadrati. Provare per credere: 1 = 0 + 1; 5 = 1+4; 29 = 25 + 4 etc.

Quindi nel campo complesso NESSUNO di questi numeri primi resta numero primo, perché è scomponibile nel prodotto di due numeri complessi coniugati. Infatti noi sappiamo che

$(a + i b)(a - i b) = a^2 + b^2$, ed un numero è primo proprio perché non ha fattori interi (reali o complessi).

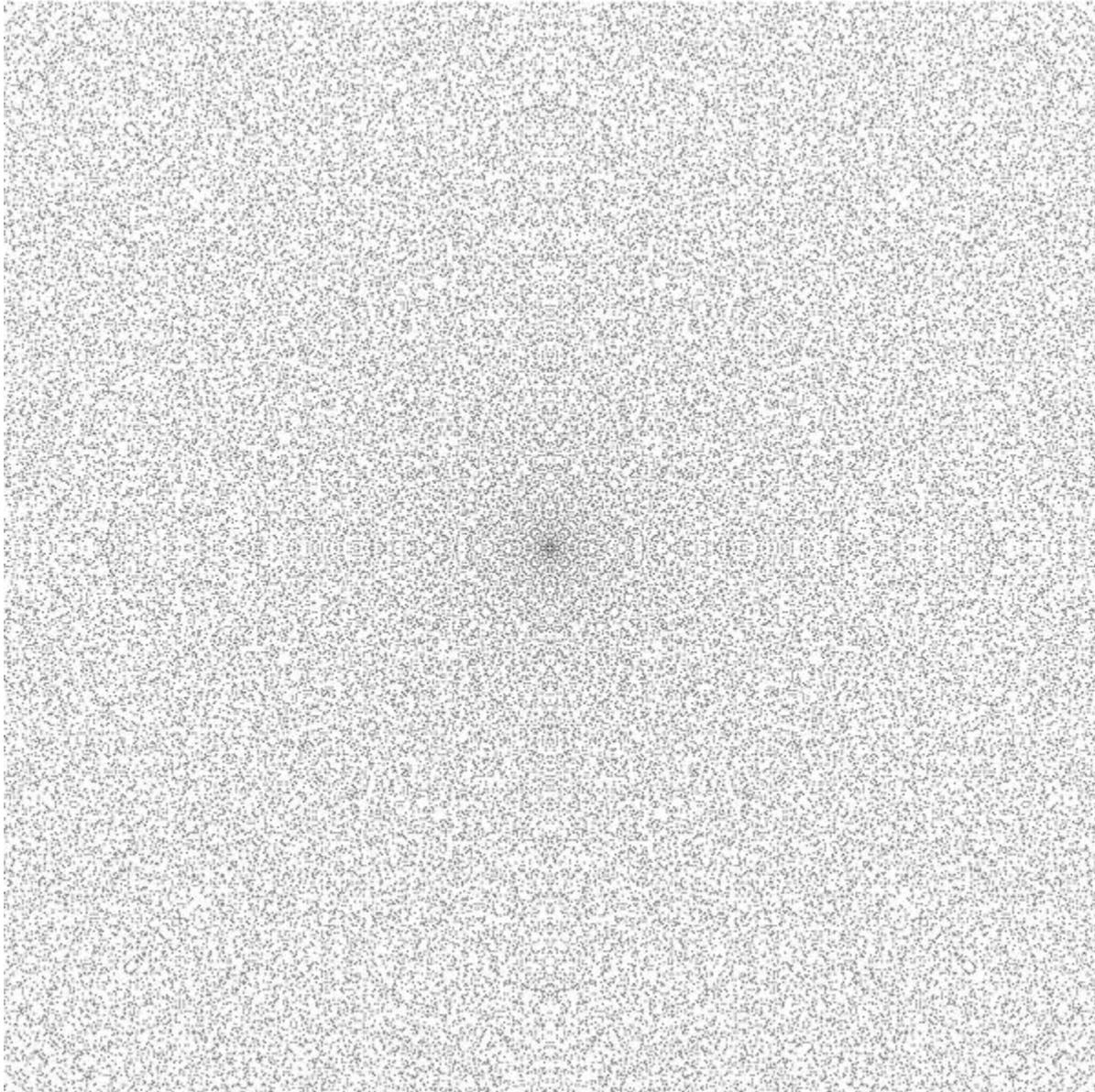
Per esempio: 5 = (1+i2)(1-i2) e 29 = (5+2i)(5-2i).

E con questo ci siamo persi metà dei numeri impostori che se ne stavano tranquilli sull'asse reale fingendosi primi e sapendo bene di non esserlo.

I primi sul piano complesso sono disordinatissimi, ma sembrano ordinati perché ci sono le simmetrie che ho suggerito. In effetti,

$$5 = (1 + i\,2)(1 - i\,2) = (2 + 1)(2 - i) = (-1 + 2\,i)(-1 - 2\,i) = (-2 + i)(-2 - i)$$

E in realtà ci sono quattro numeri che possono essere considerati come unità sul piano complesso: +1, -1, i, -i.

L'immagine sottostante, che proviene da Wikipedia ("Gaussian Primes") rappresenta i numeri primi sul piano complesso e sembra disordinata, ma se la guardate bene presenta certe strane regolarità … irregolari. C'è quasi da impazzire.

## LXIV. E PER L'ULTIMA VOLTA NUMERI PRIMI

Non posso resistere a rivelare un'ultima scoperta del "principe", per discutere la quale dovremo tornare indietro di un passo ed accettare ancora i numeri primi della forma 4n+1, che nel campo complesso sarebbero degli impostori. .

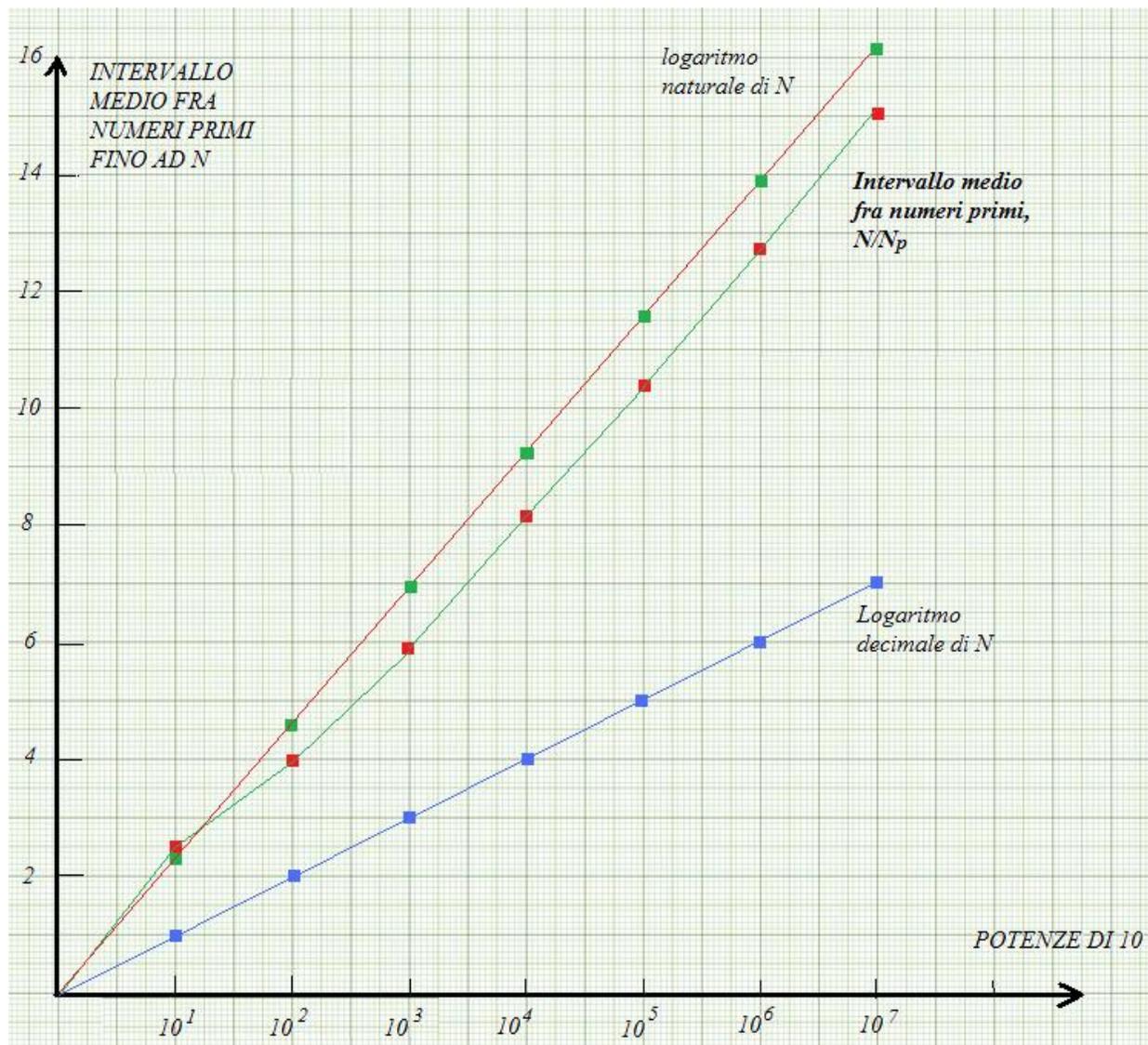
Poiché non si riusciva a stabilire a priori, dato un numero primo, quale fosse il suo prossimo successore, il "principe" pensò che si potesse forse dare almeno un'idea di come i numeri primi si distribuiscono statisticamente. Cioè, Gauss sperava che non potendosi dire con precisione né quali né quanti sono i numeri primi fino ad un certo numero N, almeno si potesse dire approssimativamente quanti sono.
Credo che pensasse che il numero di numeri primi più piccoli di N potesse essere introdotto nell'eguaglianza

$$\frac{N}{Numero\ di\ numeri\ primi\ N_p} = intervallo\ medio\ fra\ numeri\ primi\ consecutivi\ (fino\ ad\ N)$$

e che questo intervallo medio potesse essere espresso in qualche modo matematicamente elegante, il quale, soprattutto, non richiedesse di contare brutalmente i numeri primi.
L'intervallo medio, se vogliamo, ci dice ogni quanti numeri qualsiasi un numero – in media - è primo, e non sfugge a chi esamini la distribuzione dei numeri primi, che questo intervallo si allunga al crescere di N, cioè che i numeri primi sono sempre più rari (anche se, pare, esistono fino all'infinito coppie di numeri primi come 29 e 31, la cui differenza è 2, il minimo possibile per due numeri dispari, quali sono tutti i numeri primi a parte 2).
Il problema, dunque, era quello di trovare un'espressione per questo intervallo medio fino ad N. Gauss aveva a disposizione tavole di numeri primi e si mise a fare tentativi. La distribuzione reale, ottenuta contando i numeri primi (Gauss ai suoi tempi arrivava a 1 milione), è come segue:

| N | Numeri primi fino ad N | "Intervallo medio tra numeri primi consecutivi" = $N/N_p$ |
|---|---|---|
| 10 | 4 | 2.5 |
| 100 | 25 | 4 |
| 1000 | 168 | 5.95 |
| 10000 | 1229 | 8.13 |
| 100000 | 9592 | 10.42 |
| 1000000 | 78498 | 12.74 |
| 10000000 | 664579 | 15.05 |

Possiamo provare a fare un diagramma dell'intervallo medio per le diverse N, ma sorge subito un problema. L'intervallo medio è dato da numeri tra 0 e 20 e quindi possiamo mettere senza

problemi i punti su una scala opportuna, sull'asse verticale. Ma per le potenze di dieci, sull'asse orizzontale, abbiamo tre possibilità: o facciamo un  diagramma enorme, con il 10 a un millimetro dall'origine e 10000000 a dieci milioni di millimetri (10 km), o rinunciamo alle potenze piccole, o rinunciamo a quelle grandi. Nessuna di queste possibilità ci va bene, e allora proviamo a mettere direttamente sulla scala non i numeri, ma il loro logaritmo decimale, cioè il numero di zeri per le potenze di dieci, cioè 1 per 10, 2 per 100, 3 per 1000 eccetera. Questo è lecito e ci permette di mettere tutti i dati che abbiamo su un foglio relativamente piccolo.

Su questo tipo di diagrammi, una retta indica che stiamo lavorando sui logaritmi. Ad esempio, i logaritmi decimali stanno sulla retta azzurra. Un diagramma dei logaritmi in base differente sarà un'altra retta che passa per l'origine, con inclinazione diversa, essendoci – come sappiamo - proporzionalità fra i logaritmi di uno stesso numero in basi diverse  (provare per credere). Ma se i logaritmi decimali si allontanano così tanto dai punti sperimentali, che c'è di più naturale che provare ad usare i "logaritmi naturali"? Che ci dicono allora la linea rossa e la linea verde? Che

l'intervallo medio osservato sperimentalmente è quanto meno parallelo al logaritmo naturale di N.

Il "principe" fece quindi l'ipotesi che – grosso modo –

$$\frac{N}{N_p} = \ln(N)$$

cioè

$$N_p = \frac{N}{\ln(N)}$$

Dove "ln" è l'espressione comunemente usata per indicare il logaritmo naturale di N.
Forse Gauss non usò precisamente un diagramma come il nostro, perché altrimenti avrebbe forse proposto la legge:

$$N_p = \frac{N}{\ln(N) - A}$$

Dove A, come si vede dal diagramma, vale circa 1. Per esempio A si può ricavare dall'ultima riga della nostra tabella precedente:

A = ln(10000000)-10000000/664579 = 1.071.

Se Gauss considerò questa legge, evidentemente, per qualche ragione, la scartò. Il matematico Legendre, che probabilmente usò questo metodo, propose invece per A il valore 1.08366, e noi non ne siamo lontani.

Ma tutto questo, serve a qualcosa? Una legge matematica estratta dall'esperienza e non dal puro ragionamento, ha senso se serve, per esempio a prevedere qualcosa. Potremmo chiederci, ad esempio, quanti siano i numeri primi inferiori a $10^8$ . Per ottenere questo risultato, potremmo semplicemente aggiungere il punto corrispondente a $10^8$ nel diagramma in figura prolungando la retta verde. Oppure potremmo usare la legge ricavata, usando la nostra costante e non quella di Legendre per pura coerenza.
Troveremmo che

$$N_p = \frac{10^8}{\ln(10^8) - 1.071} = \frac{100000000}{8 \cdot 2.3026 - 1.071} = 5763755{,}2$$

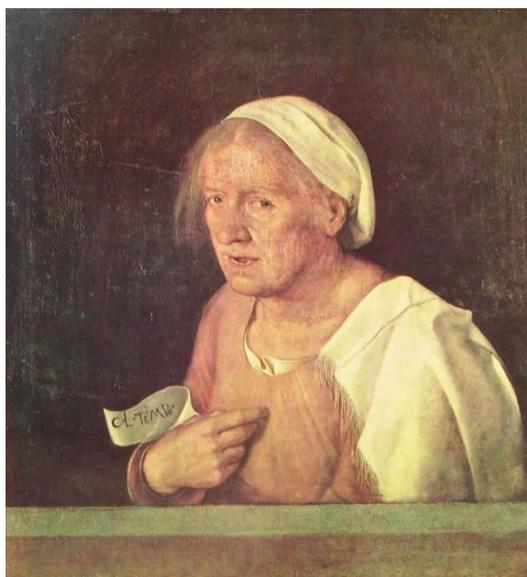
Il "virgola 2" evidentemente è dovuto al fatto che usiamo logaritmi, che per lo più sono numeri decimali illimitati, e li applichiamo a numeri interi. Quindi possiamo trascurarlo. Confrontiamo con il numero vero, che è 5761455. Usando la costante A data da Legendre avremmo avuto un risultato un po' più lontano dal vero.
Può non sembrare una gran cosa, ma questo errore di meno del 4 per diecimila è un risultato prodigioso, anche se il metodo seguito non ci indica in nessun modo quali siano esattamente questi 5 milioni di primi.

Un vasto campo di ricerca è aperto su questa congettura di Gauss, che fu dimostrata da altri, ed oggi si chiama “teorema dei numeri primi”. Molti sperano che su questa base si possa trovare un modo di scrivere una formula che permetta di prevedere esattamente qual è “il prossimo numero primo”. E, mentre la A è oggi praticamente sparita dalla circolazione, ci troviamo alle soglie di un concetto famoso, l’araba fenice dei matematici, di cui forse qualcuno avrà sentito parlare, “la congettura di Riemann”.

Ma qui siamo proprio alle trincee avanzate della matematica, e gli strumenti per abbordare questi studi non li abbiamo.

## LXV. FRATTALI

In questi ultimi trent'anni sono diventati assai di moda i cosiddetti "frattali". Se si va a guardare su internet alla parola "frattali", o, in inglese "fractals", si trovano pagine e pagine piene di disegni in genere assai complicati e coloratissimi. Vorrei qui cercare di dare un'idea di cosa sono e come si costruiscono.

Uno dei problemi che possiamo proporci è "Perché certi quadri o certe fotografie o certe persone o certe cose ci piacciono". E' da notare che tutto sommato c'è da sperare che una risposta non la si trovi mai. E' come quando alcuni ricercavano perché ridiamo. Se lo sapessimo non rideremmo più. Ma lasciamo perdere.

Questo è un bel quadro di Giorgione. Nelle sue intenzioni è chiaro che la vecchia doveva apparire brutta. Infatti ha un cartellino in mano su cui sta scritto "Col tempo". Voleva dire "Col tempo tutte le donne belle diventano brutte". Forse aveva litigato con la fidanzata. Ma, se questa era la nonna di un bambino di tre anni, probabilmente il nipotino la considerava una delle donne più belle del mondo. E se uno possedesse questo quadro lo metterebbe in casa al posto d'onore e lo mostrerebbe con orgoglio agli amici. Brutta vecchia, ma bel quadro. Allo stesso modo la foto di una leonessa può essere bella come rappresentazione di un bel felino. Se però un nostro zio fosse stato divorato da una leonessa in un safari, i nostri sentimenti potrebbero essere diversi, soprattutto a seconda dell'eredità ricevuta.

E questa “*scolopendra cingulata*”? Per me è uno degli animali più orribili che esistono. Ma certo, se si tratta di una scolopendra mamma, i suoi scolopendrini la considerano la più bella creatura della Terra.

Potremmo continuare all’infinito, per concludere che ci piacciono o non ci piacciono immagini e figure perché rappresentano persone e cose verso cui proviamo sentimenti intensi, di amore , affetto, odio, disgusto.

Ma è possibile che ci piacciano figure per le quali non sentiamo né attrazione né repulsione? Il filosofo Platone non avrebbe avuto dubbi. Tra le figure piane lui avrebbe ammirato il cerchio e gli infiniti poligoni regolari, nello spazio i suoi cinque poliedri platonici ed il solido più perfetto, la sfera.  Chissà, magari avrebbe passato giorni interi a contemplarli.  Ma non tutti siamo dei Platone, e alla sfera magari preferiamo la Madonna della seggiola, di Raffaello.

Ma perché  allora ci piace il Monte Rosa, anche se magari non lo abbiamo mai visto prima e non ci siamo mai saliti?

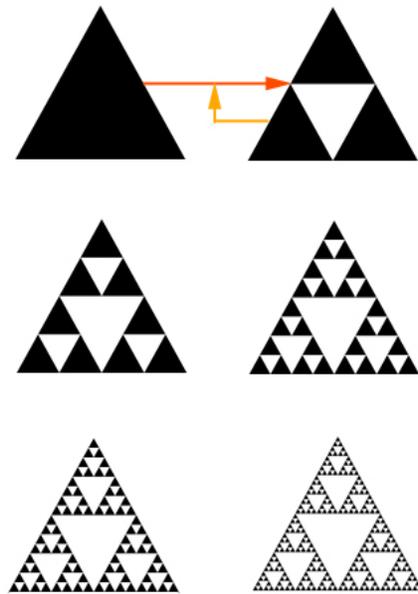
Alcuni pensano che la risposta stia in una peculiarità del profilo della montagna, della struttura della montagna e dei boschi che la circondano, che sarebbero dei "frattali".

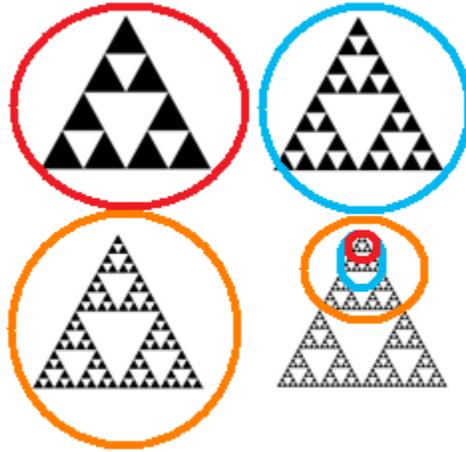
Magari è vero. Intanto, che cos'è un frattale? Io non voglio dare una definizione matematica, ma una definizione pratica.
I frattali sono costruzioni geometriche che hanno una o più tra le seguenti proprietà:

- Proprietà di autosimilarità.
- Nel piano, perimetro infinito; nello spazio una superficie infinita.
- Nel piano, area nulla; nello spazio volume nullo.
- Dimensioni non intere  (né 0 , né 1, né 2,  né 3…)

L'autosimilarità richiede qualche spiegazione. Vuol dire che se ingrandiamo la figura di un certo fattore vediamo dettagli che riproducono  la figura di partenza. Ingrandendo di nuovo dello stesso fattore, vediamo altri dettagli che sono ancora identici (o quasi) alla figura di partenza. E via dicendo.

In quanto alle dimensioni non intere, ci vuole uno sforzo di fantasia, o meglio, un'estensione del concetto di dimensione, che faccia posto per dimensioni che non sono zero (le dimensioni del punto), non sono una (le dimensioni della retta), non sono due (le dimensioni del piano), non sono tre (le dimensioni dello spazio), ma qualcosa di intermedio. Più avanti vedremo come si fa.

Vediamo un primo esempio, il **TRIANGOLO DI SIERPINSKI.**

Questa figura non la possiamo vedere finita. La serie di fotogrammi qui sopra ci indica come facciamo a costruirla. Ogni passo è una nuova “generazione”.  Il trucco è:”Ogni volta che vediamo un triangolo nero, gli facciamo un buco triangolare congiungendo i punti di mezzo dei lati”. E questo fino all’infinito.
Vediamo che procedendo in quest’operazione di fare buchi triangolari pian piano il nostro bel triangolo nero compatto si disperde in un polverino di triangolini. Però  ogni volta che tracciamo il  contorno di un nuovo buco, questo contorno rimane nelle generazioni future, ed è ciò che ci assicura che il nostro Sierpinski ha almeno dimensione 1, perché un contorno è pur sempre una linea, che ha dimensione 1.

**L’autosimilarità** è evidente. Ogni triangolo nero della figura in basso a destra, alla fine del processo, è a sua volta un triangolo di Sierpinski. O, se si preferisce, ingrandendo progressivamente di un fattore due, ritroviamo tutte le generazioni precedenti, ma sempre tenendo in mente che ogni triangolo nero lo è solo in prima approssimazione

**Il perimetro** cresce ad ogni generazione. Al perimetro di ogni triangolo, per esempio lungo 6 unità, ad ogni generazione aggiungiamo un buco con perimetro lungo 3. Quindi al termine di ogni passo il perimetro di ogni triangolo va moltiplicato per (6+3)/6 cioè 3/2. E chiaro che se facciamo infiniti passi il perimetro si è allunga di

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}$$

Cioè il perimetro diventa infinito, una caratteristica proprietà dei frattali sul piano. Se non ci credete, provate a farlo anche solo con una piccolo calcolatrice.
I successivi passi danno

| Passo n | $\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ |
|---|---|
| 1 | 1.5 |
| 2 | 2.25 |
| 3 | 3.375 |
| 4 | 5.0625 |

Possiamo già fermarci e considerare che in pratica ogni due passi moltiplichiamo per più di un fattore 2, e ogni 4 passi per un fattore 5. Quindi in 8 passi un fattore 25, in 12 passi un fattore 125 e vediamo che possiamo tranquillamente crescere fino all'infinito. Per i matematici dire che una potenza come $(3/2)^n$ va all'infinito vuol dire che se uno mi dice un numero grande quanto gli pare, io posso trovare almeno una potenza n di (3/2) maggiore di quel numero. Per esempio uno mi dice 1000? Benissimo, calcolando semplicemente le successive potenze trovo che:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{20} > 1000$$

Se non avete una calcolatrice o un PC, andate su Google e scrivete “(3/2)^20 =”, e lui vi darà buono buono la risposta, che è 3325.

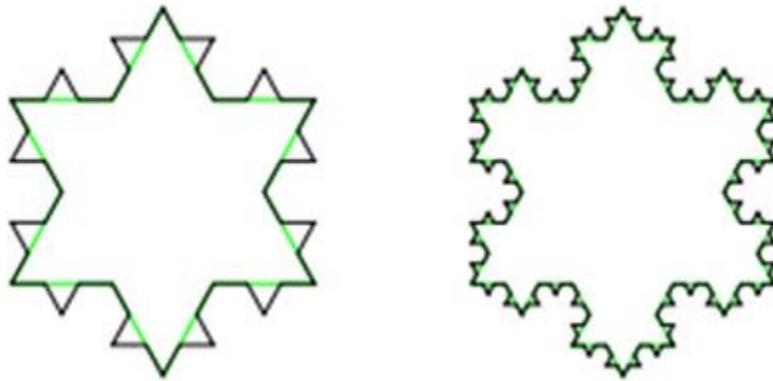
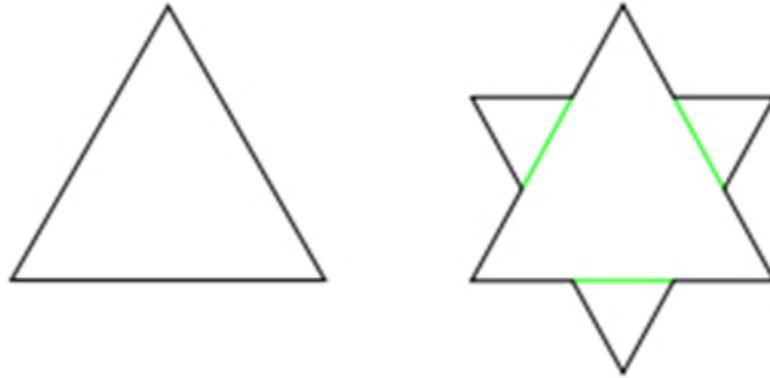
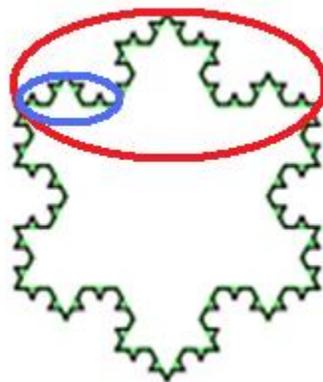
Similmente ad ogni passo **l’area** decresce di un fattore ¾. Infatti possiamo vedere ogni triangolo come costituito da quattro triangoli neri all’inizio del passo, ed alla fine del passo da tre triangoli neri e un buco. Quindi ad ogni passo l’area viene moltiplicata per (4-1)/4 = (3/4), che è inferiore ad 1, per cui dopo infiniti passi l’area va moltiplicata per un fattore

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\infty}$$

Siccome ¾ è più piccolo di 1, questo numero tende a zero. Cioè voi mi dite un numero piccolo quanto vi pare e io vi dico almeno una potenza n di ¾ che è più piccola. Infatti, per esempio, se volete una potenza che dia un valore minore di 1 millesimo, io rispondo $(3/4)^{25}$= 7 decimillesimi.

Ma bisogna proprio fare tutte le moltiplicazioni successive per trovare l’esponente giusto? L’indicazione l’ho data più sopra. Per i numeri maggiori di uno, vedete quante moltiplicazioni dovete fare per arrivare a 2. Siano M. Bene, in 2M operazioni vi porteranno ad un fattore 4, 3M ad un fattore 8, 10M ad un fattore 1000 (in realtà 1024). E 20M?
Per i numeri minori di 1, cercate quanti prodotti dovete fare per arrivare a 1/10, il doppio vi porterà a 1/100 eccetera. In particolare, per 3/4 , dovete moltiplicarlo 9 volte per se stesso per arrivare a 7/100, meno di un decimo. Quindi in 27 volte siete a meno di 1/1000, come già abbiamo visto.

Un altro frattale molto noto è la **CURVA DI VON KOCH**. Anche questa risulta da infinite generazioni successive.

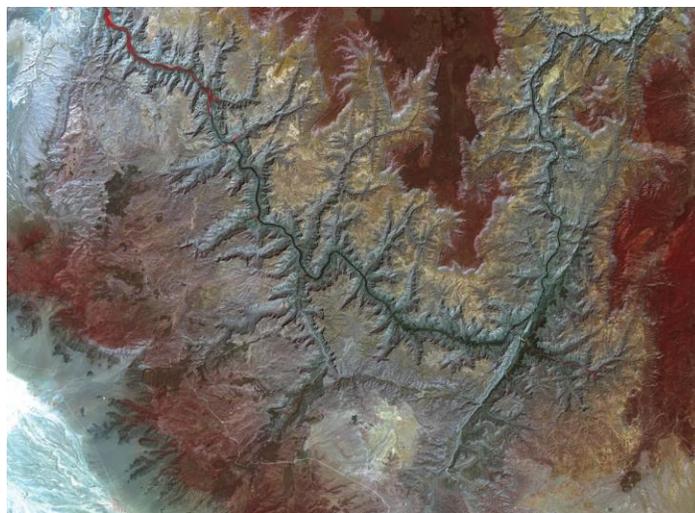
Si parte con un triangolo e da ogni segmento rettilineo (in questo caso sono tre segmenti, i lati del triangolo) togliete il terzo di mezzo e la sostituite con i due lati di un triangolo equilatero la cui base sarebbe il terzo (qui segnato in verde) che avete tolto.

Abbiamo fatto quattro passi e vediamo che abbiamo a che fare con un finissimo merletto. Anche qui abbiamo **l'autosimilarità**, in quanto ogni segmento presenterà la stessa struttura del lato superiore:

Una volta terminato il processo, il segmento nell'ellisse blu riproduce quello nell'ellisse rossa. Non solo, ma - se guardiamo bene - nell'ellisse rossa, che è quella blu ingrandita tre volte, ci

stanno quattro segmenti come quello dell'ellisse blu. I due segmenti di mezzo sono di sbieco, ma sono identici al primo.

Trattandosi di una linea, spezzata quanto si vuole, **l'area** resta zero.
Infine la **lunghezza è infinita**. Infatti, ad ogni passo noi sostituiamo ogni segmento lungo 3 con una spezzata lunga 4, cioè aumentiamo la lunghezza totale di 4/3. Il gioco adesso lo sappiamo, dato che 4/3 è maggiore di 1,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\infty} = \infty$$

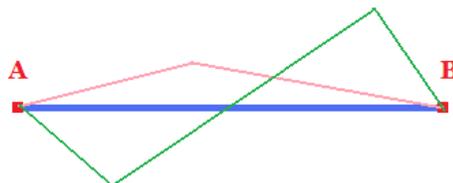
In natura abbiamo dei "quasi frattali", che, ingranditi a più riprese, ci offrono grosso modo la stessa forma. Ci sono tre principali differenza
1) La stessa struttura non è proprio la stessa;
2) C'è meno ordine;
3) C'è sempre una scala minima.

Anche se noi proviamo a disegnare la curva di Von Koch, mentre la matematica ci garantisce che possiamo continuare a scendere nei dettagli, ci saranno ad un certo punto dei limiti naturali, al più tardi quando il nostro disegno a matita su un foglio di carta si sarà sfarinato in un mare di molecole di cellulosa con molecole di grafite, che non avranno alcuna similarità con la curva di Von Koch originale.

La figura ci mostra un caratteristico frattale, la veduta del Grand Canyon da satellite. Il fiume è al centro di un sistema di affluenti, subaffluenti, sub-subaffluenti, fino ad arrivare, nei giorni di pioggia, a minutissimi rigagnoli, che grosso modo tutti riproducono la struttura principale.

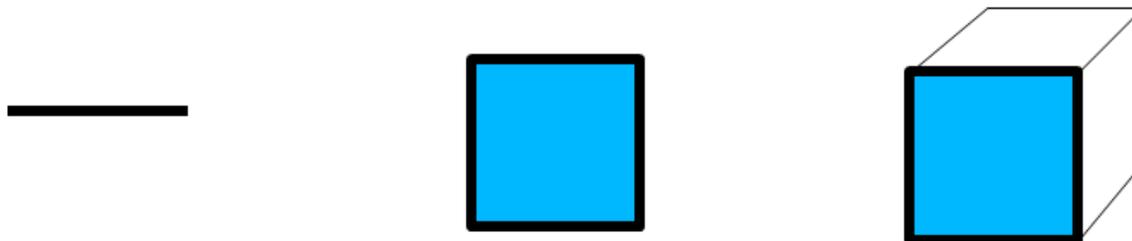
Allo stesso modo le coste, per esempio dell'Inghilterra, con minor regolarità, presentano fino ad un certo punto lo stesso fenomeno della curva di Von Koch. Cioè , passando a scale sempre minori, la lunghezza della costa aumenta.

Come si fa a misurare in modo razionale la lunghezza della costa? Si scelgono dei punti sulla costa che siano a 200 km  di distanza in linea d'aria. Se ne trovano 12, il che significa che la costa, in questa approssimazione, è lunga 2400 km. Però vediamo subito che l'approssimazione è assai deludente. Molti golfi scompaiono e molte punte sono tagliate fuori.
Non c'è che una possibilità, inserire punti intermedi.

Vediamo che diminuendo la scala il perimetro viene approssimato sempre meglio, e la lunghezza aumenta. Non è strano.

Se al tratto rettilineo  AB sostituiamo qualsiasi altra linea spezzata (o anche curva) inevitabilmente allunghiamo il percorso, perché la retta è linea più breve tra due punti.

Alla fine, la CIA dice che la lunghezza delle coste della Gran Bretagna è 12429 Km. Confesso che non capisco come si possa arrivare a tanto. Chissà fino a che scale si è scesi, o chissà quali altre isole sono state incluse.

Ed ora parliamo di dimensioni.

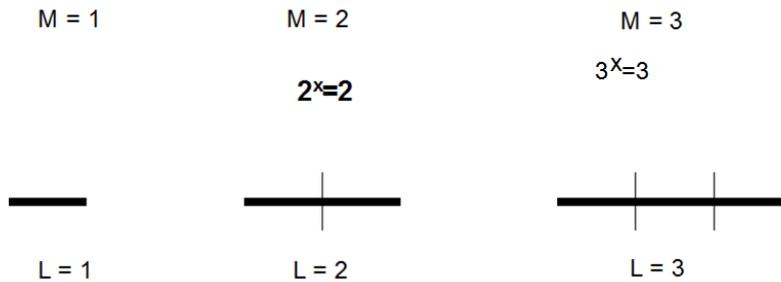
Quando noi ingrandiamo qualcosa parliamo normalmente di ingrandimento lineare L.
Ciò detto, noi vogliamo  vedere come cresce la grandezza dell'oggetto in funzione dell'ingrandimento lineare.

Su questi oggetti noi possiamo disegnare le scale che vogliamo. Possiamo dividere il segmento in dieci parti e poi ciascuno dei decimi in dieci parti e ancora fino all'infinito. Avremo così costruito un "finto"  frattale. Il segmento rimane un segmento, ma ingrandendolo vedremo oggetti simili su scale sempre più piccole.
Il quadrato, a sua volta,  lo possiamo dividere in 10 x 10 cioè  100 quadratini, e ciascuno di essi a sua volta in 100 quadratini e ciascuno in 100, fino all'infinito. Il cubo lo potremo dividere in 1000 cubetti e ciascuno in 10000 cubetti etc.
Nessuno dei tre oggetti cambia le sue proprietà solo perché ci facciamo dei disegni. Tuttavia, se ingrandiamo L volte otteniamo M oggetti eguali a quello di partenza, nei modi indicati più sotto.
Inoltre, si noterà che esiste una relazione che lega ingrandimento L e numero di oggetti M, costante per ogni oggetto. E la relazione è

$$\mathbf{M = L^x}$$

Per il segmento abbiamo la seguente situazione:

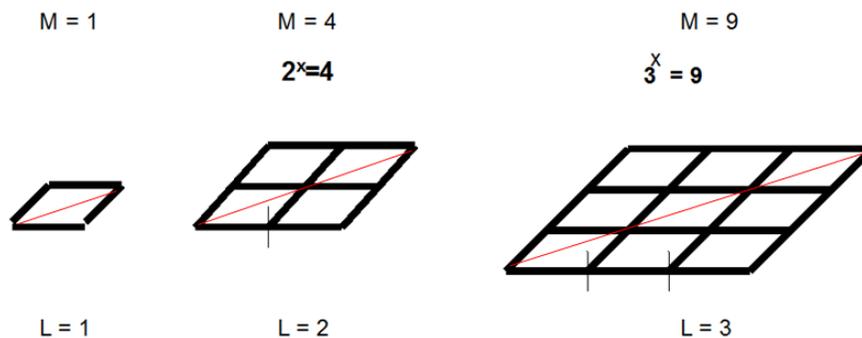
M = 1 M = 2 M = 3

$2^x=2$ $3^x=3$

L = 1 L = 2 L = 3

Cioè , ingrandendo due volte abbiamo due segmenti eguali a quello di partenza etc.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 2$, $3^x = 3$ etc. **Ad occhio** si vede che x=1.

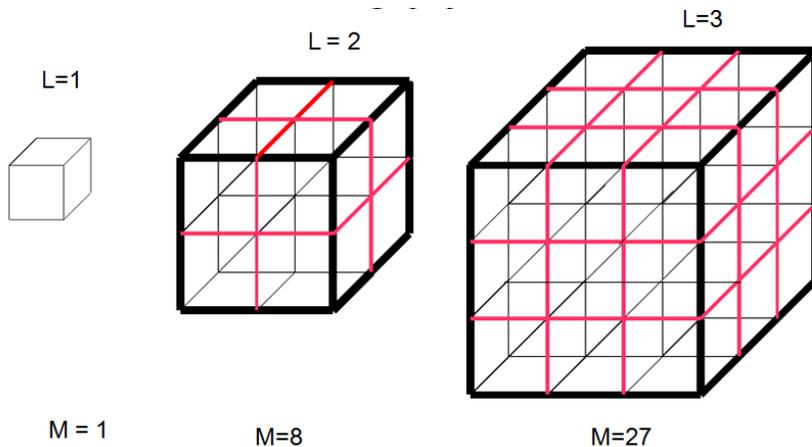
$$\mathbf{M = L^1}$$

Per il quadrato la situazione è la seguente:

Cioè ingrandendo 2 volte il lato abbiamo 4 quadrati eguali a quello di partenza, ingrandendo tre volte abbiamo 9 quadrati.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 4$, $3^x = 9$ etc. **Ad occhio** si vede che x = 2.

$$\mathbf{M=L^2}$$

Occorre ricordare che L è un “ingrandimento lineare”, cioè il rapporto fra due lunghezze corrispondenti. Possono essere i lati, o anche le diagonali del quadrato, che ho segnato in rosso.

Infine, per il cubo:

Cioè ingrandendo 2 il lato volte abbiamo 8 cubi eguali a quello di partenza, ingrandendo tre volte abbiamo 27.

Ora vogliamo una x che ci dia $2^x = 8$, $3^x = 27$ etc. **Ad occhio** si vede che x = 3.

$$M=L^3$$

Dico "ad occhio" perché non è più di moda fare l'operazione di trovare x dati M e L (ma noi lo abbiamo fatto, e in più modi!). Qualsiasi persona a cui voi vi rivolgiate, che anche abbia fatto studi di matematica a livello universitario, o conosce a memoria il risultato o va a guardare su apposite tavole o usa una calcolatrice scientifica o un PC.

A questo punto facciamo uscire il coniglio dal cappello: questa $x$ in $L^x = M$ è la dimensione, e quadra con quel che sappiamo finora delle dimensioni. Il segmento ha una dimensione, il quadrato ne ha due, il cubo ne ha tre. Inoltre questa definizione di dimensione o dimensionalità ci permette di estendere il concetto ai frattali.

Vediamo per esempio il nostro Sierpinski.

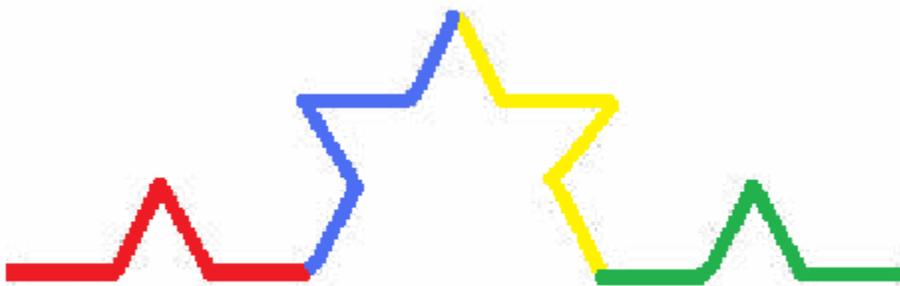
Notate che non abbiamo a che fare con veri triangoli, ma ciascun triangolo marcato S è un triangolo sforacchiato. Qui vediamo che raddoppiando le dimensioni lineari del triangolo abbiamo non 4 Sierpinski, ma solo 3, perché il quarto è un buco. Abbiamo quindi

$$3 = 2^x$$

Saremmo nei guai se non avessimo già risolto un paio di equazioni come questa.
Forse qualcuno che ha una buona memoria potrebbe arrivare subito ad una buona approssimazione anche usando il regolo calcolatore che abbiamo costruito.
Come sappiamo, e come si verifica subito, dividendo per due la distanza di un numero dall'origine, misurata in mm, o quadretti (chiamiamola logaritmo), si trova la radice quadrata del numero. Infatti facendo il quadrato, cioè raddoppiando il logaritmo, ovvero moltiplicando per 2 il logaritmo del numero originale, si ottiene il numero di partenza.
Qui però abbiamo il problema inverso. Vogliamo sapere per quante volte dobbiamo dividere il logaritmo di un numero per ottenere il logaritmo dell'altro.
Dunque dobbiamo dividere la "lunghezza" del primo numero per la "lunghezza" del secondo.

Nel nostro caso il numero 3 lo troviamo a 23 quadretti dallo 0, il 2 a 14.5, e dividendo 23/14.5 troviamo 1.586.
Ora chi usa QBasic , o Google, o le tavole, dirà che il numero corretto è **1.585**…. (Quando l'ho trovato la prima volta sono rimasto stupito dalla precisione del mio regolo).

Dunque il triangolo di Sierpinski ha dimensioni 1.585…. Un bel risultato.

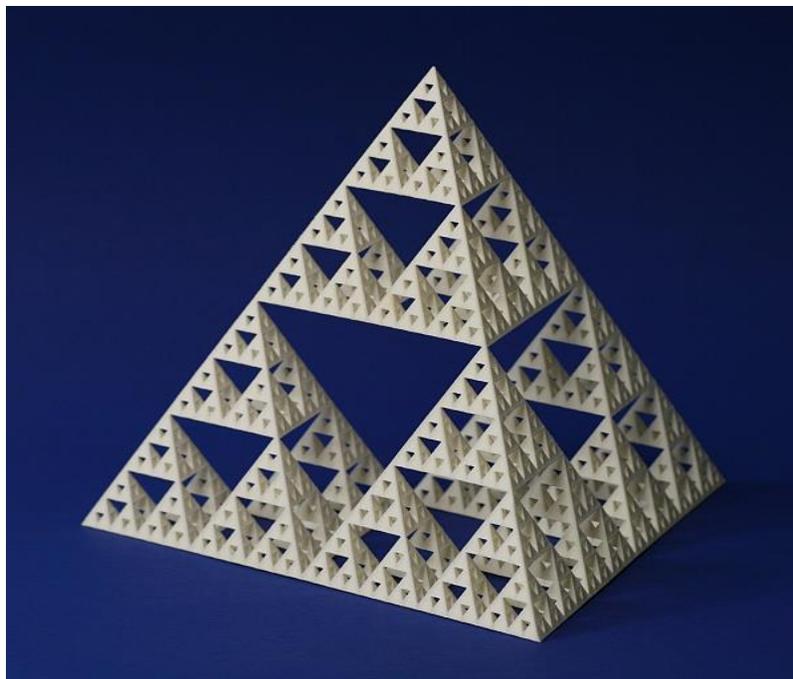
E il nostro Von Koch?
Qui vediamo che triplicando la scala della nostra figura troviamo non tre, ma quattro riproduzioni della stessa lunghezza dell'originale, che ho colorato in quattro colori diversi.
Ancora una volta, ogni elemento è una piena curva di Von Koch, come apparirebbe dopo infinite generazioni.
I sospettosi diranno: perché triplicare e non duplicare come abbiamo fatto con Sierpinski?
Risposta : Perché altrimenti avremmo avuto 4 oggetti di lunghezza 2/3 dell'originale, non quattro oggetti eguali all'originale e quindi M non sarebbe stato un intero e avremmo dovuto fare qualche calcolo in più.

Abbiamo quindi

$$4 = 3^x$$

E qui, o chiediamo al solito amico, o andiamo a vedere il nostro regolo: 4 è a 29 quadretti dall'origine, 3 è a 23 quadretti, quindi x = 29/23, cioè 1.261. L'amico che va a vedere le tavole ci direbbe **1.262** (Però, quel nostro regolo!). Queste sono le dimensioni della curva di Von Koch.

Ad ogni modo i conti tornano. Sierpinski ha meno delle dimensioni di una superficie, con tutti quei buchi, mentre Von Koch ha più delle dimensioni di una linea, perché tutte quelle aggiunte ne fanno una banda che è una trina finissima. Una banda continua avrebbe dimensioni 2.

Naturalmente esistono anche frattali in tre dimensioni e più dimensioni, tanto artificiali quanto naturali. Per loro il volume tende a zero, la superficie di contorno tende all'infinito e le dimensioni continuano a poter essere diverse dai numeri naturali. Potete cercare su Internet il tetraedro di Sierpinski, o la spugna di Menger o altri ancora. Il primo è un curioso oggetto per uno strano caso.

Il tetraedro di Sierpinski viene costruito tenendo ad ogni passo un tetraedro per vertice, in tutto quattro tetraedri. Ovvero, raddoppiano il lato, troviamo quattro tetraedri di Sierpinski invece di 8.

Cioè $2^x = 4$. Raddoppiamo ancora ed abbiamo 16 tetraedri come quelli di partenza, cioè $4^x = 16$. Qui non abbiamo bisogno di ricorrere al nostro vecchio regolo: x vale 2, esattamente come per una superficie. Cioè questo oggetto in tre dimensioni fallisce miseramente, ed ha le dimensioni di una superficie.

In natura trovate quest'altro bellissimo frattale, il favorito dei bambini, soprattutto bollito.

Alcuni ritengono che introducendo nei frattali qualche aspetto casuale questi abbiano un aspetto più gradevole per l’occhio umano. Sono i frattali che imitano la natura o è  la natura che imita i frattali?

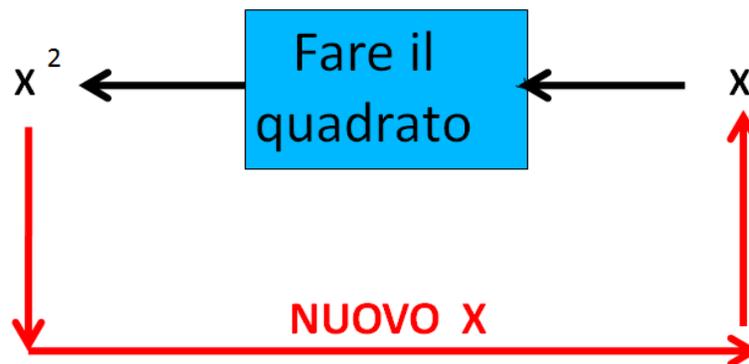
E quindi veniamo alla domanda iniziale, perché ci piace il Monte Rosa. Alcuni pensano che sia perché le montagne sono specie di frattali, il cui profilo si riproduce su scale sempre più piccole, come la curva di Von Koch, con in più quel po’ di casualità che tanto ci piace..

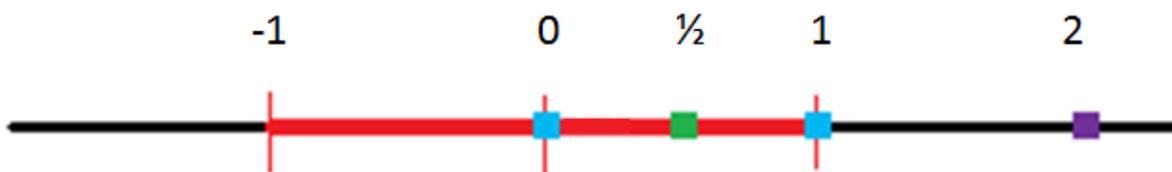
Si potrebbe continuare ad ingrandire il profilo fino a raggiungere le asperità dei sassi, e sempre vedremmo delle quasi montagne.

Affascinante ipotesi. Chissà se è vera.

**MANDELBROT**

Ci resta da discutere un ultimo frattale, il padre di tutta una dinastia di frattali. Si chiama "insieme di Mandelbrot". Fu ritrovato da Benoît Mandelbroit nel 1975, ed in pratica aprì la moda dei frattali, che fino ad allora erano curiosità matematiche riservate a un pubblico ristretto.

Per costruire un insieme di numeri bisogna in qualche modo indicare quali numeri ne fanno parte e quali no.
Per avvicinarci a "Mandelbrot" incominciamo da quello che chiameremo "l'insiemino". Per definire se un numero X fa parte dell'insiemino lo facciamo passare un gran numero di volte nel "macchinino".

Il macchinino fa semplicemente il quadrato di X. Poi prende il risultato e fa di nuovo il quadrato, fino a che non diciamo basta. A questo punto facciamo la nostra legge: se i numeri risultanti, chiamiamoli "i discendenti di X", si allontanano progressivamente dallo zero, vuol dire che non vogliono stare con noi, e non faranno parte dell'Insiemino. Gli altri numeri, i cui successivi discendenti stanno fermi dove sono o si avvicinano allo zero, faranno parte dell'Insiemino (con tutti i vantaggi che risultano per un numero ben educato).

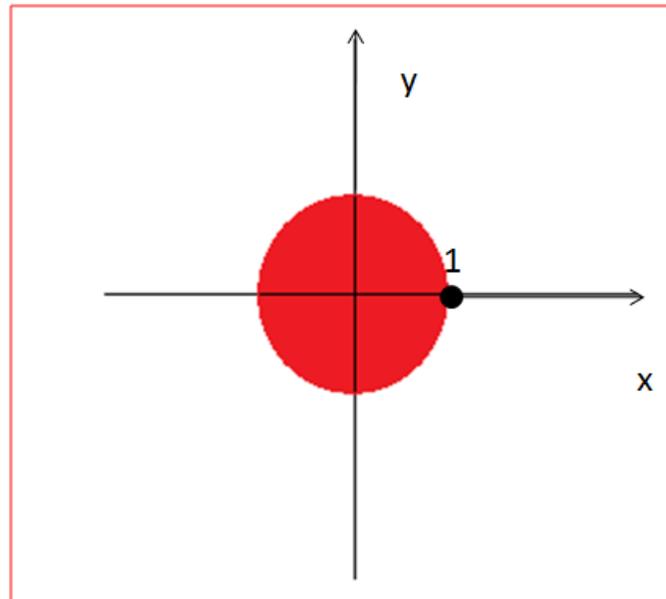
Come potrete verificare, qualsiasi numero maggiore di 1 avrà discendenti che si allontaneranno dallo zero; 1 e 0 restano dove sono, perché tutte le loro potenze sono 1 e 0 rispettivamente. Più curioso è -1, che prima passa a 1 e poi resta lì. Infine tutti gli altri numeri compresi tra -1 e 1 avranno discendenti che si avvicineranno allo zero. Quindi l'Insiemino, sulla cosidetta retta "Reale", che abbiamo già incontrata, sarà il segmento rosso in figura:

Notate che un numero vicinissimo ad 1, per esempio 1.000000000000000001 prima o poi si allontanerà all'infinito. La matematica ha l'infinito a disposizione, e un miliardo di miliardi di operazioni non sono neppure l'inizio dell'infinito.

Il matematico purosangue, quale siete ormai anche voi, se avete avuto lo stomaco di seguirmi fin qui, immediatamente si chiede se non si possa estendere al piano l'Insiemino. Certo che lo si può. Introduciamo dunque l'Insiemone. Qui i numeri saranno identificati da due coordinate x e y.

Sul piano abbiamo l'Insiemone: il MACCHINONE prende le due coordinate x e y del punto… e fa il "quadratone"

Ora il "Quadratone" di (x,y) è definito così: "Quadratone di *(x, y) =(* $x^2 - y^2$, *2xy)".* Per esempio, se x =2, y =1, troviamo che il quadratone è (3, 4), due onestissimi numeri che possiamo far girar di nuovo nel Macchinone.
Avremmo potuto decidere diversamente, per esempio il Quadratone di (x,y) avrebbe potuto essere ($x^2$,$y^2$), ma noi abbiamo preferito la forma indicata anche perché, se qualcuno va a cercare tra le operazioni con i numeri complessi, trova che $(a + ib)(c + id)= (ac - bd) + i(bc + ad)$. Da cui segue che $(x + iy)(x +i y)= (x^2 - y^2) + i(2xy)$. Ma guarda. Tuttavia, questo non è necessario saperlo. Può essere utile, perché la distanza del punto $x + iy$ dall'origine è un numero unico, cioè $d = x^2 + y^2$ e se vogliamo vedere se un discendente, dopo di aver passato il numero nel macchinone, si allontana dall'origine possiamo tranquillamente calcolare la distanza sommando i

quadrati delle due componenti. Altrimenti disegnate il punto nel piano e vedete ad occhio se i vari discendenti si allontanano o si avvicinano dall'origine.

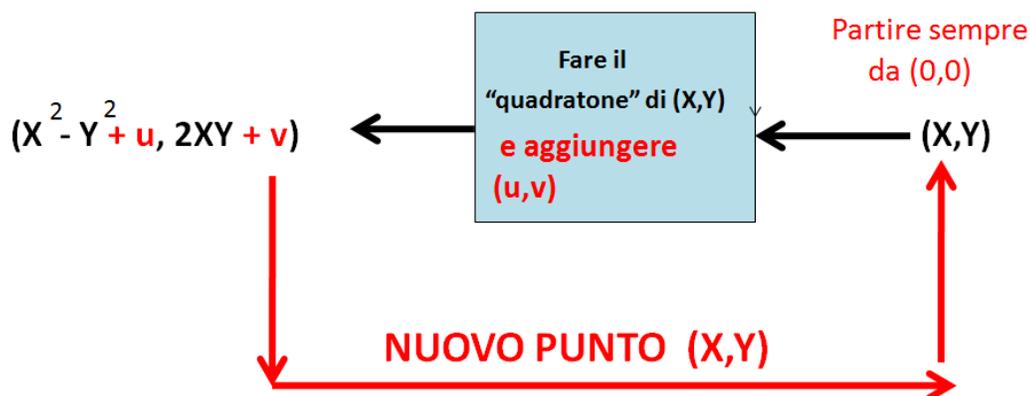
Ad ogni modo, anche qui facciamo la legge: i numeri i cui discendenti (passando nel macchinone) si allontanano dall'origine andandosene all'infinito ci stanno dicendo che non vogliono stare con noi, e quindi non li accetteremo nell'insieme. A questo punto, o fate i vari conti o vi fidate. Il risultato è che l'Insiemone, sul piano, è il cerchio di raggio 1.

Dunque avete diverse possibilità: o la cosa non vi interessa, o vi interessa e vi fate i conti a mano con una calcolatrice, o fate un programma QBasic come il seguente:

***PROGRAMMA BASIC NUMERO 28 : APPARTENENEZA ALL'INSIEMONE***

```
      CLS
      PRINT "Verifica se un punto di coordinate x,y appartiene all'Insiemone"
10    INPUT "Coordinata x =  ", x
      INPUT "Coordinata y =  ", y
      PRINT "Il punto scelto ha coordinate ", x, y
      FOR  i =1 to 100
      x1 = x^2-y^2
      y1 = 2*x*y
      d = SQR(x1^2+y1^2)
      PRINT x1, y1, d
      IF d=0 THEN EXIT FOR
      IF d>2 THEN EXIT FOR
      x = x1
      y = y1
      NEXT i
      GOTO 10
```

Questo rudimentale programma, una volta ricevute le due coordinate x, y, farebbe 100 tentativi nel ciclo "FOR" a meno che la distanza del "discendente" dall'origine non arrivi a zero (o almeno ad un punto che il calcolatore non può distinguere dallo zero), o a meno che la distanza

diventi maggiore di 2. Il programma si arresterebbe in questi due casi, come richiedono le due istruzioni IF (che in Inglese significa “se”) e “THEN EXIT FOR”, che significa “allora esci dal ciclo, il cui nome è FOR ”. Quasi sempre 100 giri nella macchina sono sufficienti per dimostrare le intenzioni del punto scelto. Ma se provate a scegliere punti assai vicini ad (1, 0), come (1.0001, 0) vedete che magari 100 passi non bastano. Provate a sostituire FOR i=1 to 1000 o 10000 per vedere cosa succede.
Una volta che ha finito con un punto, il programma chiede le coordinate di un nuovo punto. Andrebbe avanti per sempre, a meno che non lo fermiate premendo contemporaneamente **Ctrl** e **C**.

E adesso siamo pronti per il frattale dei frattali. Mandelbrot pensò ad un’altra legge, che però è, credo, la più semplice dopo quella che produce l’Insiemone. Per decidere se il punto in due dimensioni (u, v) fa parte dell’insieme, bisogna farlo girare nella “Macchina di Mandelbrot”:

Per esempio, scegliamo il punto (u=1, v=1).
Poi incominciamo col mettere nella macchina (X,Y)= (0,0) come d’accordo.
Il primo discendente è il nostro (u,v) cioè (1,1).
Se vogliamo, possiamo calcolare la distanza dall’origine, che è √(2), circa 1.41.
Adesso facciamo passare (1,1) nella macchina.
Il secondo risultante è (1, 3), distanza √(10), circa 3.16. Ahi ahi, questo non vuol stare con noi.
Facciamo un terzo passaggio tanto per essere sicuri. Il risultante è (-7, 7). La distanza è 7√(2).
Insomma, questo punto non fa parte dell’insieme.

I matematici che costruiscono l’insieme di Mandelbrot, per evitare di far fare a un punto infiniti giri nella macchina di Mandelbrot, hanno fatto la convenzione (basata sull’esperienza) che quando un discendente di un punto ha raggiunto la circonferenza di raggio 2, lo si dà come perduto per l’insieme.

Ora bisognerebbe fare il calcolo per un grandissimo numero di punti nel piano per avere la forma dell’insieme di Mandelbrot, che dopo tutto è così poco diverso, nella sua legge di formazione, dall’Insiemone. Bene, se siete in grado anche solo di immaginare la forma vaga del Mandelbrot, mi inchino. Non credo che neanche Mandelbrot stesso l’avesse prevista.

Per non rovinarvi il piacere di indovinare dovete girare la pagina.

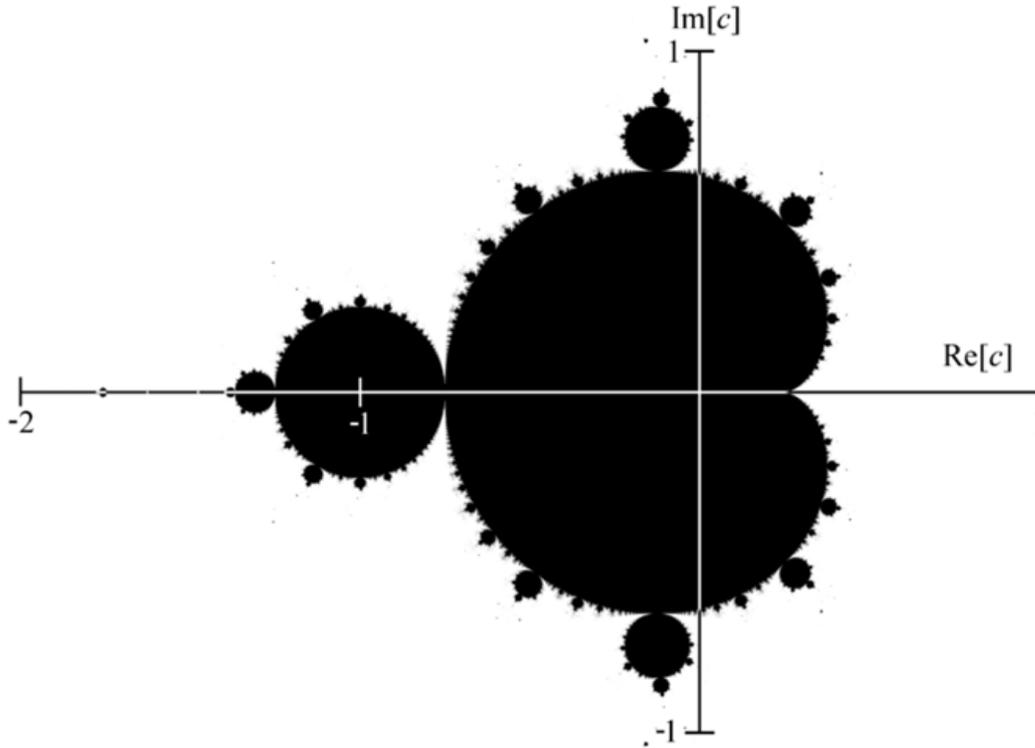
Intanto potete dare un'occhiata  al seguente programma:

***PROGRAMMA QBASIC NUMERO 29: APPARTENENZA ALL'INSIEME DI MANDELBROT***

```
CLS
PRINT  "VERIFICA SE UN PUNTO DI COORDINATE U,V APPARTIENE A MANDELBROT"
INPUT "COORDINATA U = ";U
INPUT "COORDINATA V = ";V
PRINT "IL PUNTO SCELTO HA COORDINATE " U,V
C1 = U
C2 = V
50 FOR I = 1 TO 100
U1 = U^2-V^2
X = U1+C1
V1 = 2*U*V
Y = V1+C2
D = SQR(X^2+Y^2)
PRINT X,Y,D
IF D = 1.000000E-06 THEN EXIT FOR
IF D > 2 THEN EXIT FOR
U = X
V = Y
NEXT I
END
```

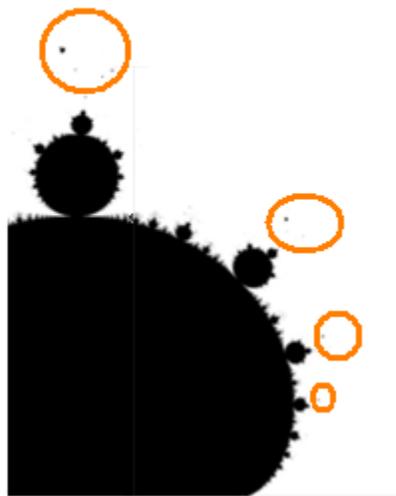
In questo programma, molto simile a quello dell'Insiemone, ho essenzialmente saltato il primo passo, che invariabilmente produce (u,v).

**In quanto segue  molte figure sono tolte dall'eccellente articolo di Wikipedia intitolato "Mandelbrot Set".**

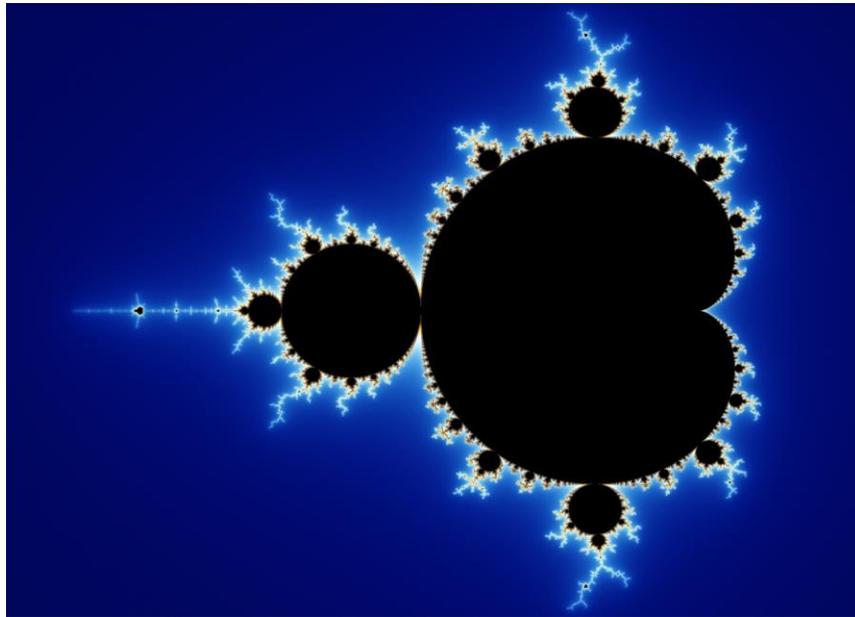
# Insieme di Mandelbrot

Il frattale è il contorno dell'insieme di  Mandelbrot. Se guardate bene la figura vedete un'infinita ricchezza di particolari. A parte l'unica figura che assomiglia vagamente a un cuore (o qualcosa del genere) messo per traverso, la figura più frequente assomiglia ad una vecchia borraccia piatta, con un tappo e due manici:

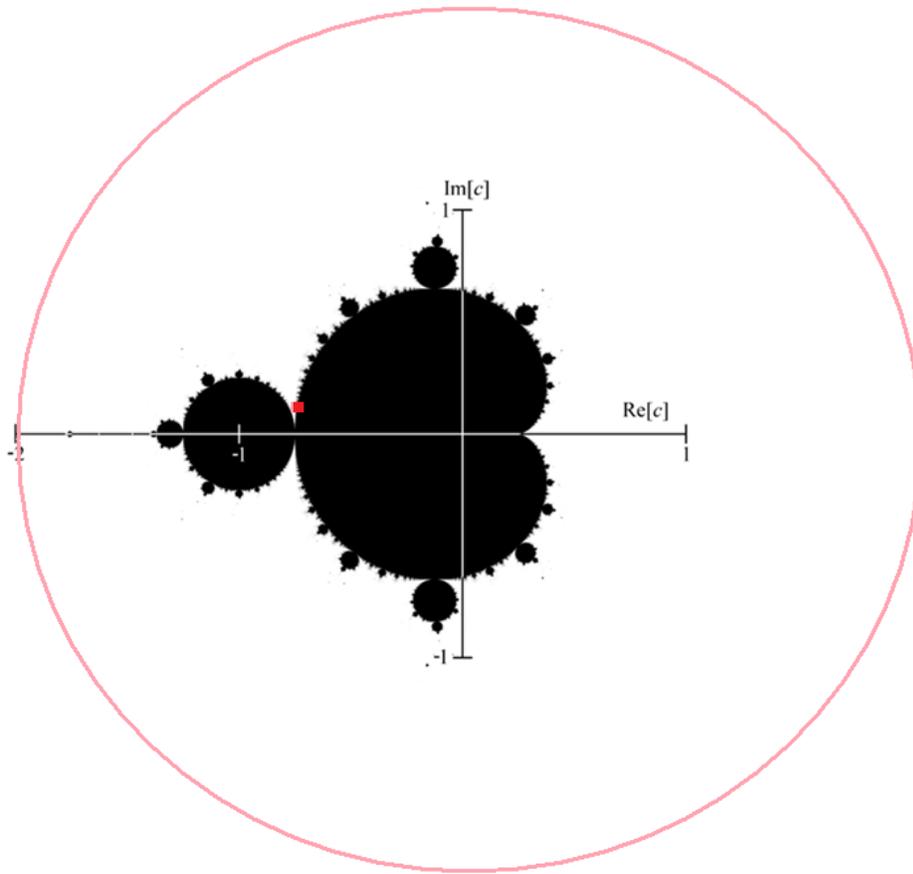
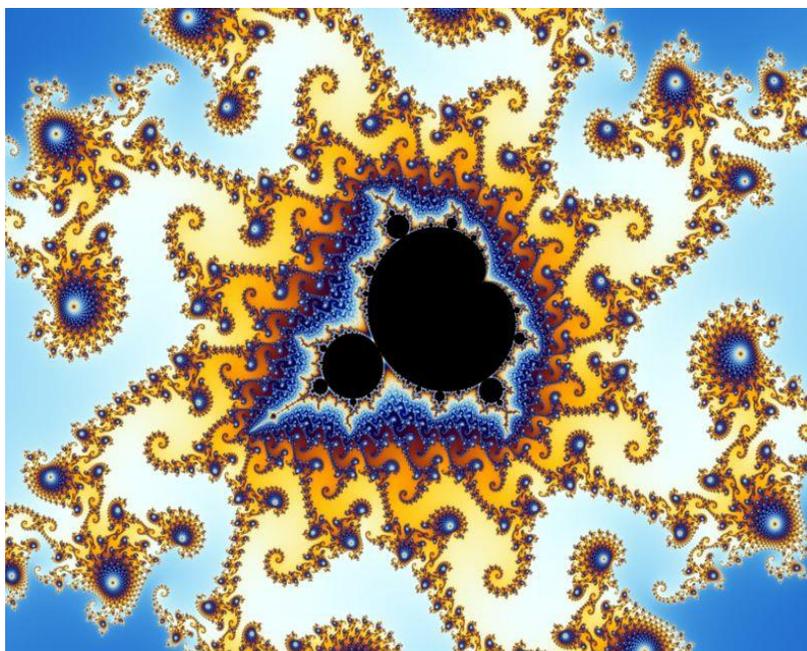
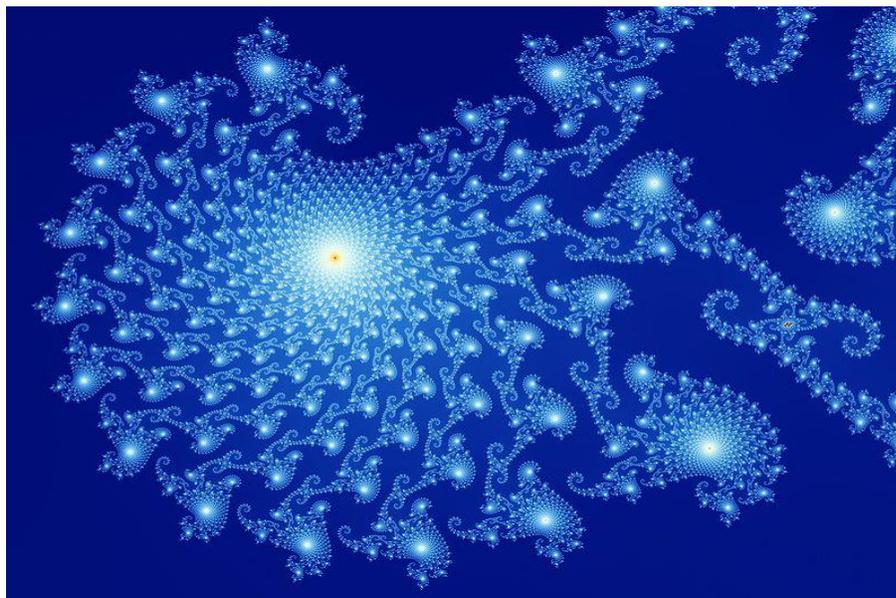
Ma i manici e il tappo sono una riproduzione della stessa borraccia, la quale a sua volta ha tappo e manici ciascuno dei quali è una riproduzione della stessa borraccia, che a sua volta….e avanti, avanti.

Una cosa occorre notare. L’insieme di Mandelbrot presenta straordinarie configurazioni, di cui darò qualche esempio, con punti che differiscono di pochissimo i quali hanno comportamenti estremamente diversi e creano immagini di una incredibile complicazione. Tutto questo, però, è possibile vederlo soltanto perché sono stati inventati i calcolatori elettronici, che possono calcolare il comportamento di miliardi di miliardi di punti in tempo brevissimo. Tutta l’umanità che si mettesse a calcolare il comportamento di miliardi di miliardi di punti dovrebbe lavorare per tutta la vita per riprodurre quello che un computer di opportune dimensioni fa in qualche ora. E’ un poco la situazione delle caverne che presentano forme e colori bellissimi, che l’umanità potrebbe ignorare per sempre a meno che uno speleologo non le scopra. O come le statue del Duomo di Milano, che sono diverse migliaia, ma non sono evidentemente fatte per gli uomini, soprattutto turisti, che ne vedono solo qualche centinaio, e ne guardano molte meno.

Ad esempio, ci sono nella figura più sopra certi puntini che magari credete siamo macchioline accidentali.

Neanche per idea. Non solo non sono macchioline accidentali, ma sono piuttosto dei “mandelbrottini” i quali, molto ingranditi, diventano, o quasi, il nostro insieme di Mandelbrot di partenza.

Qui qualcuno ebbe un’idea di effetto. Quando partiamo con un punto (u,v) e poi lo facciamo girare nella macchina di Mandelbrot, i suoi discendenti potranno restare nell’insieme. Quindi il punto iniziale (u,v) ha il diritto di esser colorato in nero, come membro dell’Insieme di Mandelbrot. Un numero molto maggiore di punti invece avrà dei discendenti che se ne andranno all’infinito, cioè per la convenzione indicata, raggiungeranno la circonferenza di raggio 2. Il punto iniziale allora dovrebbe essere bianco, come nelle figure precedenti. Tuttavia non tutti i discendenti di un punto se ne vanno all’infinito (cioè arrivano distanza 2 dall’origine) con la stessa fretta. Alcuni ci vanno in pochi salti, altri restano nei dintorni del punto di partenza per un numero lunghissimo di passaggi attraverso la macchina di Mandelbrot. Il matematico che disegna l’insieme può allora decidere di dare colori diversi ai punti che non appartengono

all’Insieme di Mandelbrot, proprio a seconda nel numero di giri che i discendenti devono fare per uscire dalla circonferenza di raggio 2. Non c’è nulla di obbligatorio in tale convenzione. Vedrete dei Mandelbrot su fondo blu e dei Mandelbrot su fondo rosso. Nella convenzione usata da Wikipedia, i punti i cui discendenti vanno via veloci sono colorati in blu, quelli un po’ meno veloci in viola, quelli ancor meno veloci in rosso, poi arancio, poi giallo, e quelli lentissimi bianco. A questo punto anche ciò che nella prima figura era bianco acquista una struttura.

Si vede inoltre che quei puntini isolati che avremmo potuto credere macchioline accidentali sono legati all’insieme principale da regioni “bianche”, ben definite, che (anche per la scelta dei colori) assomigliano a scariche elettriche e sono costituite da punti che sono stati a lungo indecisi se mandare i loro discendenti all’infinito.

Su Wikipedia troverete vari ingrandimenti successivi di una zona che può essere identificata come il punto rosso dell’insieme qui sotto, in cui abbiamo anche disegnato il cerchio di raggio 2. Questi ingrandimenti rivelano una straordinaria ricchezza di forme costituite dal fatto che i discendenti di punti vicinissimi possono avere comportamenti diversissimi.

Ingrandendo circa 50000 volte la zona intorno a quel punto, cioè in modo che la nostra figura diventi un gigante di 5 kilometri, se siamo fortunati nel centrare precisamente il punto, troviamo la seguente figura:

Troveremmo cioè un altro insieme di Mandelbrot delle dimensioni originali di circa un micron. Notate bene che questo insieme è parte dell'insieme originario, ma gli è simile e, come la curva di Von Koch, ripresenta le stesse strutture dell'insieme iniziale. Ma continuiamo ad ingrandire i dintorni del punto rosso che avevamo scelto. Per esempio, ingrandendo 100 milioni di volte, ad un punto in cui il nostro insieme di Mandelbrot è diventato grande come la nostra Terra, troveremmo questo straordinario oggetto.

Addirittura, Wikipedia vi propone un filmato, che potete anche scaricare da Internet, con cui il viaggio continua fino a che l'insieme di Mandelbrot originale è qualche migliaio di volte più

grande dell’Universo. Ma, volendo, si potrebbe ingrandire ancora, e continuare sempre scoprendo nuove strutture da sempre nascoste ai nostri occhi, fino all’infinito.

## LXV.   LA FINE DI QUESTO LIBRO

Ed ora siamo alla fine di questo libro. Ma questo libro non è il LIBRO. Avevo detto che il LIBRO ha 1000 pagine, ma dicevo per dire. Naturalmente del vero LIBRO noi abbiamo appena letto le prime di righe di un certo numero di capitoli, cioè le prime righe o forse soltanto le prime parole della teoria elementare dei numeri,  della geometria elementare ed analitica, della trigonometria, dell'analisi numerica, della topologia, del calcolo delle probabilità, del calcolo matriciale ed altre discipline. Sono solo le prime parole, anche  se conoscere tutto quel che cioè scritto in questo libro vi pone tra i privilegiati (uno su cento) che comprendono che la matematica va al di là delle quattro operazioni.
Ma resta ancora moltissimo da fare.
La domanda è :"Quanto è questo moltissimo?".  Dobbiamo pensare che la matematica sia un campo infinito in cui ogni progresso, cioè la soluzione di ogni problema o la dimostrazione di ogni teorema, porta alla definizione di almeno un nuovo problema da risolvere o un nuovo teorema da dimostrare? Perché se così non fosse, presto o tardi non avremmo più problemi da risolvere o teoremi da dimostrare.  Se questo sia una buona cosa, lo si può discutere.
Certo sono molti i casi in cui non c'è fine alle costruzioni che possiamo fare, dato tempo e disponibilità.
Persino se abbiamo un'infinità di elementi eguali di Lego, usando le una o due regole di composizione che conosciamo, possiamo costruire sempre nuove e almeno più grandi costruzioni, la maggior parte magari poco divertenti, ma certo ognuna diversa dalle altre.
Quindi, anche ammettendo che la matematica sia un campo che non si esaurisce, potremmo pensare di esplorarlo procedendo  ordinatamente, un lavoro per cui magari non c'è neanche bisogno di pensare. Oggi potremmo pensare di farlo fare ad un computer opportunamente programmato.

Cento anni fa i matematici si ponevano questi problemi e lavoravano proprio nella direzione di costruire un sistema di assiomi e postulati da un lato, e di definizioni dall'altro (con magari niente da questa parte, come avrebbe voluto fare Hilbert), da cui, girando una manovella,  sarebbero usciti tutti i teoremi, per esempio della teoria dei numeri.  Io non ho mai avuto simpatia per questo genere di progetti che ucciderebbe il piacere della matematica.

Nel caso dei numeri razionali avete visto quel che è successo a noi: abbiamo trovato un metodo per elencare tutte le frazioni ed abbiamo trovato che esistono numeri che non sono inclusi nell'elenco. Così potrebbe essere che trovando un macchinario per elencare i teoremi dimostrabili uno dietro l'altro ne lasceremmo sempre fuori qualcuno, che per essere fuori dal sistema non è dimostrabile coi mezzi a nostra disposizione.

Questa è la tesi moderna, che sorge da due fondamentali teoremi di logica (studio dei meccanismi del ragionamento) dimostrati dal logico matematico Kurt Gödel  nel 1930 circa. Ci sarebbero infatti teoremi ("proposizioni") che non si possono dimostrare sulla base degli assiomi e postulati della teoria dei numeri - e di molti altri rami della matematica. E siccome ciò varrebbe anche per la proposizione/teorema che afferma il contrario, non si può decidere se la proposizione sia vera o falsa. In altre parole, la proposizione è "indecidibile". In geometria abbiamo incontrato un esempio di proposizione indecidibile, cioè  il postulato delle parallele, che abbiamo anche brevemente discusso.

Dalla necessaria esistenza di proposizioni indecidibili, secondo vari autori,  discendono  molte conseguenze, le une accettate da tutti, le altre da quasi nessuno, che però vanno tutte nella direzione di affermare che la matematica è inesauribile e quindi non si possono dimostrare a macchina tutti i suoi teoremi.

La base dei ragionamenti che hanno portato a questi due - complicati - teoremi  risiede in una elementare incapacità della macchina della nostra mente di decidere se siano vere o false affermazioni del tipo di quella già nota ai Greci come il problema di Epimenide Cretese, che disse "Tutti i Cretesi sono bugiardi".
Per evitare qualche complicazione io preferisco ridurre ulteriormente la frase a una più semplice: se io dico "questa frase è falsa" voi  dovete credermi o no? Se la frase "Questa frase è falsa" è vera, vuol dire che la frase "questa frase è falsa" è falsa. Ma allora la frase è vera. Ma se è vera - eccetera..

Per me è grande consolazione sapere che la matematica è inesauribile e la nostra mente è in pratica capace di uno sviluppo infinito.

Del resto, questa frase è falsa.

**INDICE:**